



8

ilc



352/PP SKF

PŘÍKLADY Z MECHANIKY

Jaromír Fährich, Antonín Havránek,
Danka Slavínská



UNIVERZITA KARLOVA · PRAHA

Skripty jsou hojně užívána ve cvičeních k základní přednášce z mechaniky. Proto jsme po rozebrání předchozího vydání přistoupili k nové edici. Zprvu jsme uvažovali o důkladném předělání textu. Zjistili jsme však, že podstatné předělání předlohy by bylo velmi náročné a pravděpodobně by vedlo ke vzrůstu počtu tiskových chyb. Omlováme se za některé zastaralé formulace a termíny, např. za užívání termínu hmota místo hmotnost a za užití i jiných jednotek než jsou jednotky soustavy SI. Doufáme, že Vám uvedené nedostatky neznepříjemní příliš práci se skripty a přejeme Vám mnoho zdaru při řešení příkladů.

Za autorský kolektiv

1991

A. Havránek

O B S A H

1. Kinematika bodu	7
2. Dynamika hmotného bodu	20
3. Odvozené mechanické veličiny	35
4. Harmonický pohyb	44
5. Všeobecný gravitační zákon	49
6. Základní úlohy mechaniky soustav hmotných bodů a tuhého tělesa ..	54
7. Otáčení tuhého tělesa	66
8. Pružnost a základy reologie	78
9. Mechanika tekutin	84
10. Vlnění a akustika	93

Řešení úloh

1. Kinematika bodu	97
2. Dynamika hmotného bodu	103
3. Odvozené mechanické veličiny	110
4. Harmonický pohyb	113
5. Všeobecný gravitační zákon	115
6. Základní úlohy mechaniky soustav hmotných bodů a tuhého tělesa ...	118
7. Otáčení tuhého tělesa	123
8. Pružnost a základy reologie	134
9. Mechanika tekutin	138
10. Vlnění a akustika	143

1. K i n e m a t i k a b o d u

Řešené příklady

1. Napište parametrické rovnice pro pohyb hmotného bodu, jestliže hmotný bod se pohybuje po kružnici s úhlovým zrychlením $\xi = 1 \text{ s}^{-2}$. Kružnice má střed v počátku soustavy souřadné a poloměr $R = 2$. V čase $t = 0$ je hmotný bod v klidu a nachází se v bodě o souřadnicích $[0, 2]$. Určete též tečné a normální zrychlení pohybu. pro všechny délkové rozměry uvažujeme stejnou jednotku např. m nebo cm.

Řešení: Parametrické rovnice pro obecný pohyb po kružnici poloměru 2 se středem v počátku soustavy souřadné napíšeme v tvaru

$$x_1 = 2 \cos \varphi(t)$$

$$x_2 = 2 \sin \varphi(t)$$

Úhlové zrychlení

$$\xi = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

tedy

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0$$

ω_0 je označena úhlová rychlost a φ_0 úhel, který svírá průvodič bodu s osou x v čase $t = 0$.

Z podmínky, že hmotný bod v čase $t = 0$ je v klidu, plyne, že úhlová rychlost

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = t + \omega_0 \text{ pro čas } t = 0$$

je nulová a tedy $\omega_0 = 0$. Můžeme psát

$$x_1 = 2 \cos \left(\frac{t^2}{2} + \varphi_0 \right)$$

$$x_2 = 2 \sin \left(\frac{t^2}{2} + \varphi_0 \right)$$

a dosadíme-li podmínku $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$ v čase $t = 0$

$$0 = 2 \cos \varphi_0$$

$$2 = 2 \sin \varphi_0$$

dostáváme z kterékoliv z těchto rovnic, že $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

Hledané parametrické rovnice mají tvar

$$x_1 = 2 \cos \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$x_2 = 2 \sin \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

Tečné a normálové zrychlení:

Vypočteme rychlost pohybu $\vec{v} (v_1, v_2)$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = -2t \sin\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 2t \cos\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

a zrychlení $\vec{a} (a_1, a_2)$

$$a_1 = \frac{d^2x_1}{dt^2} = -2 \sin\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 2t^2 \cos\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_2 = \frac{d^2x_2}{dt^2} = 2 \cos\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 2t^2 \sin\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Tečná složka zrychlení $a_t = \left(\vec{a}, \frac{\vec{v}}{v}\right) = \frac{1}{v} a_1 v_1$

$$a_t = \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \cdot [2t \sin(\quad) 2 \sin(\quad) + 4t^3$$

$$\sin(\quad) \cos(\quad) + 2t \cos(\quad) 2 \cos(\quad) - 4t^3$$

$$\sin(\quad) \cos(\quad)] = \frac{4t}{2t} = 2$$

vektor $\vec{a}_t = a_t \frac{\vec{v}}{v}$, tedy $\vec{a}_t (-2 \sin(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{2}), 2 \cos(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{2}))$

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ a tedy s uvažováním výrazu pro $\vec{a}$ je normálové zrychlení

$$\vec{a}_n (-2t^2 \cos(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{2}), -2t^2 \sin(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{2}))$$

a jeho velikost $a_n = 2t^2$

Pro určení a_t a a_n lze též využít vztahů $a_t = \frac{dv}{dt}$ a $a_n = \frac{v^2}{R}$. Vyjdeme-li ze vztahu $\varphi = \frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{2}$, dostáváme $v = R \frac{d\varphi}{dt} = 2t$, tedy $a_t = \frac{dv}{dt} = 2$ a $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4t^2}{2} = 2t^2$.

2. Napište parametrické rovnice bodu, který se pohybuje po přímce o rovnici $y = 2x + 3$

- rovnoměrným přímočarým pohybem s rychlostí $v = 5 \text{ cm/s}$,
- rovnoměrně zrychleným přímočarým pohybem se zrychlením $a = 10 \text{ cm/s}^2$, jehož rychlost v čase $t = 0$ je 5 cm/s ,
- harmonickým pohybem o amplitudě $A = 5 \text{ cm}$ a úhlové frekvenci $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$, jehož rovnovážná poloha má souřadnice $[0, 3]$.

V čase $t = 0$ nechť má bod souřadnice $[0, 3]$. Délkové rozměry uvažujte v cm.

Řešení: Přímka o rovnici $y = 2x + 3$ svírá s kladným směrem osy x úhel α , pro který platí $\tan \alpha = 2$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ a $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Přímka protíná osu x v bodě $[-1, 5; 0]$ a osu y v bodě $[0, 3]$.

a) Pro rovnoměrný přímočarý pohyb v rovině x, y platí parametrické rovnice

$$x = v_x t + x_0$$

$$y = v_y t + y_0$$

Z podmínky pro polohu bodu v čase $t = 0$ plyne $x_0 = 0$ a $y_0 = 3$. Hodnota $v_x = v \cos \alpha$, $v_y = v \sin \alpha$ nebo $v_x = -v \cos \alpha$, $v_y = -v \sin \alpha$ podle toho, v kterém směru se bod po přímce pohybuje. Odpovídající parametrické rovnice mají tvar

$$1. x = \sqrt{5} t$$

$$y = 2\sqrt{5} t + 3$$

nebo

$$2. x = -\sqrt{5} t$$

$$y = -2\sqrt{5} t + 3$$

b) Pro rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb v rovině x, y platí parametrické rovnice

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0$$

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$$

Podle směru zrychlení $\vec{a}$ a počáteční rychlosti $\vec{v}_0$ dostaneme tyto případy

$$1. \vec{a} = (a_x, a_y) = (a \cos \alpha, a \sin \alpha)$$

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$$

$$2. \vec{a} = (a \cos \alpha, a \sin \alpha)$$

$$\vec{v}_0 = (-v_0 \cos \alpha, -v_0 \sin \alpha)$$

$$3. \vec{a} = (-a \cos \alpha, -a \sin \alpha)$$

$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$$

$$4. \vec{a} = (-a \cos \alpha, -a \sin \alpha)$$

$$\vec{v}_0 = (-v_0 \cos \alpha, -v_0 \sin \alpha)$$

Z podmínky počáteční polohy bodu dostáváme $x_0 = 0$, $y_0 = 3$. Pro jednotlivé případy dostaneme pak tyto parametrické rovnice

$$1. x = \sqrt{5} t^2 + \sqrt{5} t$$

$$y = 2\sqrt{5} t^2 + 2\sqrt{5} t + 3$$

$$2. x = \sqrt{5} t^2 - \sqrt{5} t$$

$$y = 2\sqrt{5} t^2 - 2\sqrt{5} t + 3$$

$$3. x = -\sqrt{5} t^2 + \sqrt{5} t$$

$$y = -2\sqrt{5} t^2 + 2\sqrt{5} t + 3$$

$$4. x = -\sqrt{5} t^2 - \sqrt{5} t$$

$$y = -2\sqrt{5} t^2 - 2\sqrt{5} t + 3$$

c) Pro harmonický pohyb po dané přímce platí

$$x = A_x \sin(\omega t + \varphi) + x_0$$

$$y = A_y \sin(\omega t + \varphi) + y_0$$

kde A_x a A_y jsou průměty amplitudy do příslušných os a x_0 , y_0 souřadnice rovnovážného bodu (bodů kolem kterého se kmit koná). V čase $t = 0$ se hmotný bod na-

chází v rovnovážné poloze $[0,3]$, hodnota fázového úhlu φ je proto rovna 0. Průměty $A_x = A \frac{\sqrt{5}}{5}$ a $A_y = A \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Po dosazení za ω , x_0 a y_0 dostáváme parametrické rovnice

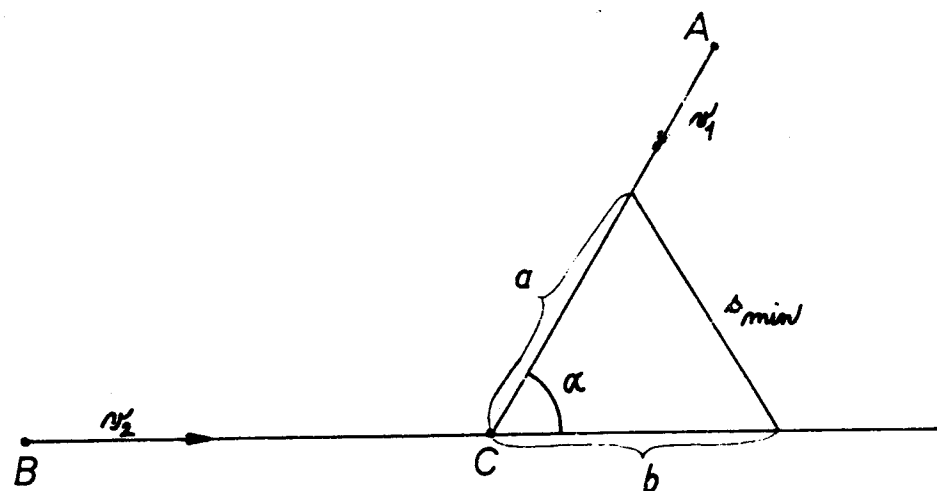
$$\begin{aligned} 1. \quad x &= \sqrt{5} \sin 10 t \\ y &= 2 \sqrt{5} \sin 10 t + 3 \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} 2. \quad x &= -\sqrt{5} \sin 10 t \\ y &= -2 \sqrt{5} \sin 10 t + 3 \end{aligned}$$

Zda nastane případ 1) nebo 2) určuje směr rychlostí v čase $t = 0$.

3. Dva body se pohybují rovnoměrným přímočarým pohybem po přímkách, které svírají úhel α a protínají se v bodě C. V čase $t = 0$ se první bod nachází v místě A vzdáleném d_1 od průsečíku C a jeho rychlost v_1 směřuje k bodu C, druhý bod se nachází v místě B vzdáleném d_2 od C a jeho rychlost v_2 rovněž směřuje k bodu C (obr. 1,1a). Určete časový průběh vzdálenosti s obou bodů, nalezněte jejich vzdá-



obr. 1,1a

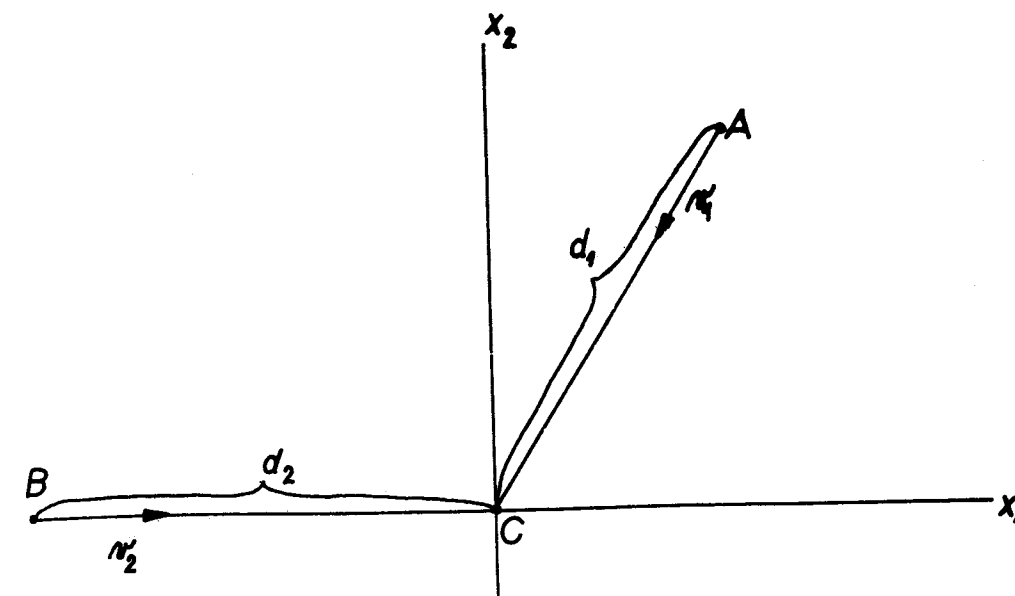
lenosti a , b od bodu C v okamžiku, kdy vzdálenost bodů je minimální ($s_{\min}$). Určete za jakých podmínek se body setkají ($s = 0$).

Řešení: Kartézskou soustavu souřadnou zvolíme např. tak, že počátek bude v bodě C a osa x_1 bude ležet ve směru pohybu druhého bodu (obr. 1,1b). V této soustavě jsou parametrické rovnice pohybu prvního bodu

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= -v_1 t \cos \alpha + d_1 \cos \alpha \\ I_{x_2} &= -v_1 t \sin \alpha + d_1 \sin \alpha \end{aligned}$$

a druhého bodu

$$\begin{aligned} II_{x_1} &= v_2 t - d_2 \\ II_{x_2} &= 0 \end{aligned}$$



obr. 1,1b

pro časový průběh vzdálenosti bodů s dostáváme

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(II_{x_1} - I_{x_1})^2 + (II_{x_2} - I_{x_2})^2} = \\ &= \sqrt{(v_2 t - d_2 + v_1 t \cos \alpha - d_1 \cos \alpha)^2 + (v_1 t \sin \alpha - d_1 \sin \alpha)^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Extrém vzdálenosti nastane, když $\frac{ds}{dt} = 0$, tedy když

$$\begin{aligned} (v_2 t - d_2 + v_1 t \cos \alpha - d_1 \cos \alpha)(v_2 + v_1 \cos \alpha) + (v_1 t \sin \alpha - d_1 \sin \alpha) v_1 \sin \alpha \\ \sqrt{(v_2 t - d_2 + v_1 t \cos \alpha - d_1 \cos \alpha)^2 + (v_1 t \sin \alpha - d_1 \sin \alpha)^2} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Vyloučíme-li případ $s = 0$, je výraz (2) roven nule, když je roven nule jeho čítec. Položíme-li čítec roven nule, dostáváme pro hodnotu času odpovídající extrémní hodnotě vzdálenosti, která podle povahy příkladu musí být minimální vzdáleností

$$t_{\min} = \frac{v_2 d_1 \cos \alpha + v_1 d_1 + d_2 v_2 + v_1 d_2 \cos \alpha}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha} \quad (3)$$

Dosadíme-li do parametrických rovnic pohybu $t_{\min}$ na čas t , dostáváme pro vzdálenost prvního bodu od průsečíku C v okamžiku minimální vzdálenosti $s_{\min}$ bodů

$$a = |d_1 - v_1 t_{\min}| = \frac{|v_1^2 d_2 \cos \alpha + v_1 v_2 d_2 - d_1 v_2^2 - v_1 v_2 d_1 \cos \alpha|}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha}$$

a pro vzdálenost druhého bodu

$$b = |v_2 t_{\min} - d_2| = \frac{|v_1^2 d_2 \cos \alpha + v_1 v_2 d_1 - d_2 v_1^2 - v_1 v_2 d_2 \cos \alpha|}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha}$$

Body se setkají, když $s = 0$. Z (1) plyne, že $s = 0$, když

$$v_2 t - d_2 + v_1 t \cos \alpha - d_1 \cos \alpha = 0$$

a současně

$$(v_1 t - d_1) \sin \alpha = 0 \quad (4)$$

Druhý výraz je roven nule, když buď $\sin \alpha = 0$ nebo $v_1 t - d_1 = 0$.
Když $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = \pm 1$ a první výraz z (4) je roven nule pro

$$t = \frac{d_1 + d_2}{v_1 + v_2} \quad \text{v případě } \cos \alpha = +1 \quad (5)$$

$$\text{a pro } t = \frac{-d_1 + d_2}{v_2 - v_1} \quad \text{v případě } \cos \alpha = -1 \quad (6)$$

Tedy v případě $\sin \alpha = 0$ a $\cos \alpha = 1$ střetnutí ($s = 0$) nastane v čase daném výrazem (5), to odpovídá pohybu bodů proti sobě v jedné přímce. V případě $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = -1$ střetnutí nastane v čase daném výrazem (6), to odpovídá pohybu bodů v jedné přímce stejným směrem. Zde nedojde k střetnutí v případě $d_2 > d_1$ a současně $v_1 > v_2$ nebo v případě $d_1 > d_2$, $v_2 > v_1$ a též v případě $v_2 = v_1$, $d_2 \neq d_1$.

Je-li v druhém výrazu z (4) $v_1 t - d_1 = 0$, je $t = d_1/v_1$ a ve stejném čase musí být anulován i první z výrazů (4).

Dostáváme tak podmínku

$$\frac{d_2 + d_1 \cos \alpha}{v_2 + v_1 \cos \alpha} = \frac{d_1}{v_1},$$

z které plyne

$$d_2 v_1 = d_1 v_2,$$

což jest podmínka, aby i při pohybu po různoběžkách nastalo setkání bodů. V této podmínce jsou zahrnuty i speciální případy

$$d_1 = 0 \text{ a současně } v_1 = 0, \quad d_2 = 0 \text{ a současně } v_2 = 0,$$

$$d_1 = 0 \text{ a současně } d_2 = 0.$$

Při vyšetřování kdy $s = 0$ jsme vypouštěli nepohybový případ, kdy $v_1 = v_2 = 0$ a vždy jsme d_1 a d_2 pokládali jakožto vzdálenosti za nezáporné veličiny.

4. Vlak jede po přímé trati konstantní rychlostí u . Automobilista jedoucí po silnici rovnoběžně s tratí stálou rychlostí v naměřil, že při potkávání mine vlak za čas t_1 , při předjíždění za čas t_2 . Vypočítejte délku vlaku ℓ a rychlost u , je-li známa rychlost automobilu v . (Vozidla se "potkají", jedou-li proti sobě.)

Řešení: Mohou nastat tři případy: 1. $v > u$; 2. $v = u$; 3. $v < u$.

1. Automobilista má rychlost větší než je rychlost vlaku, při předjíždění předjede automobil vlak. Platí

$$(v - u) t_2 = \ell$$

a při potkání

$$(v + u) t_1 = \ell$$

a odtud

$$u = \frac{v(t_2 - t_1)}{t_2 + t_1}$$

$$\ell = \frac{2 v t_1 t_2}{t_2 + t_1}$$

2. Při předjíždění zjistí automobilista, že jeho rychlost je stejná jako rychlost vlaku

$$u = v$$

při potkání pak z doby t_1 určí délku vlaku

$$\ell = 2v t_1$$

3. Při předjíždění předjede vlak automobilistu

$$(u - v) t_2 = \ell$$

a při potkání

$$(u + v) t_1 = \ell$$

odkud plyne

$$u = \frac{v(t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} \quad \text{a} \quad \ell = \frac{2v t_1 t_2}{t_2 - t_1}$$

5) Určete složky rychlosti a zrychlení bodu v polárních souřadnicích. Vyjádřete v polárních souřadnicích parametrické rovnice, rychlost a zrychlení pohybu.

$$\begin{aligned} \text{a) } x_1 &= R \sin(\phi_0 \sin \omega t) \\ x_2 &= -R \cos(\phi_0 \sin \omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x_1 &= a t \\ x_2 &= b t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x_1 &= a t + d \\ x_2 &= b t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x_1 &= a t \cos \omega t \\ x_2 &= a t \sin \omega t \end{aligned}$$

Řešení: Vztah mezi polárními souřadnicemi R, φ a kartézskými x_1, x_2 je dán rovnicemi

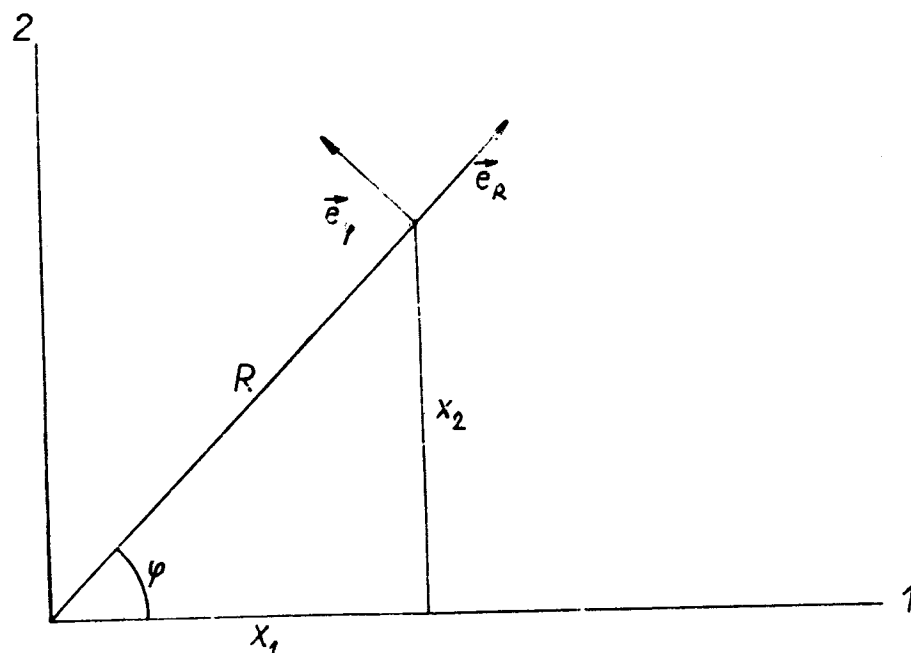
$$x_1 = R \cos \varphi \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (1)$$

$$x_2 = R \sin \varphi \quad \varphi = \arctg \frac{x_2}{x_1}$$

Budeme hledat složky vektoru rychlosti $\vec{v}$ a zrychlení $\vec{a}$ v soustavě souřadné, jejíž osy jsou pro každý bod dány směrem rostoucích souřadnic R a φ . Tyto osy jsou vzájemně kolmé. Na obr. 1, 2 jsou vyznačeny jednotkové vektory $\vec{e}_R$ a $\vec{e}_\varphi$ ve směrech obou os. Složky vektorů $\vec{a}$ a $\vec{v}$ do směru rostoucí souřadnice R označíme v_R, a_R a do směru rostoucího φ v_φ, a_φ . Pro složky $v_R, v_\varphi, a_R, a_\varphi$ vektorů $\vec{v}$ a $\vec{a}$ platí vztahy

$$\begin{aligned} v_R &= \vec{v} \cdot \vec{e}_R & v_\varphi &= \vec{v} \cdot \vec{e}_\varphi \\ a_R &= \vec{a} \cdot \vec{e}_R & a_\varphi &= \vec{a} \cdot \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (2)$$

Z (1) plyne pro kartézské složky v_1, v_2 vektoru $\vec{v}$



obr. 1,2

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dR}{dt} \cos \varphi - R \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dR}{dt} \sin \varphi + R \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi$$

a pro kartézské složky a_1, a_2 vektoru $\vec{a}$

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \left[\frac{d^2 R}{dt^2} - R \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \cos \varphi - \left[2 \frac{dR}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + R \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right] \sin \varphi$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = \left[\frac{d^2 R}{dt^2} - R \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \sin \varphi + \left[2 \frac{dR}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + R \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right] \cos \varphi$$

Kartézské složky vektorů $\vec{e}_R$ a $\vec{e}_\varphi$ jsou (viz obr. 1,2)

$$\begin{aligned} e_{R1} &= \cos \varphi & e_{\varphi 1} &= -\sin \varphi \\ e_{R2} &= \sin \varphi & e_{\varphi 2} &= \cos \varphi \end{aligned}$$

Dosadíme-li (3) a (5) do (2), dostáváme

$$\vec{v}_R = v_1 \vec{e}_{R1} + v_2 \vec{e}_{R2} = \frac{dR}{dt} \vec{e}_R$$

$$v = \sqrt{v_R^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2}$$

$$\vec{v}_\varphi = v_1 \vec{e}_{\varphi 1} + v_2 \vec{e}_{\varphi 2} = R \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi$$

Dosadíme-li (4) a (5) do (2), dostaneme

$$a_R = \frac{d^2 R}{dt^2} - R \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

$$a_\varphi = 2 \frac{dR}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + R \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \left(R^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

Poznámka: Pro válcové souřadnice R, φ, z ; $x_1 = R \cos \varphi$, $x_2 = R \sin \varphi$ a $x_3 = z$ platí pro $v_R, v_\varphi, a_R, a_\varphi$ stejné výrazy jako pro polární souřadnice v rovině a přistupují další jednoduché vztahy

$$v_z = \frac{dz}{dt} \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Pro sférické souřadnice $\kappa, \vartheta, \varphi$; $x_1 = \kappa \sin \vartheta \cos \varphi$, $x_2 = \kappa \sin \vartheta \sin \varphi$ a $x_3 = \kappa \cos \vartheta$ lze způsobem analogickým zde provedenému odvodit

$$v_\kappa = \frac{d\kappa}{dt} \quad a_\kappa = \frac{d^2 \kappa}{dt^2} - \kappa \left[\left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin^2 \vartheta \right]$$

$$v_\vartheta = \kappa \frac{d\vartheta}{dt} \quad a_\vartheta = \frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt} \left(\kappa^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right) - \kappa \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$v_\varphi = \kappa \frac{d\varphi}{dt} \sin \vartheta \quad a_\varphi = \frac{1}{\kappa \sin \vartheta} \frac{d}{dt} \left(\kappa^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

Pro pohyb a) je parametrické vyjádření v polárních souřadnicích

$$R = \kappa$$

$$\varphi = \phi_0 \sin \omega t - \frac{\pi}{2}$$

$$v_R = 0, \quad v_\varphi = \kappa \phi_0 \omega \cos \omega t$$

$$a_R = -\kappa \phi_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t, \quad a_\varphi = -\kappa \phi_0 \omega^2 \sin \omega t \cos \omega t$$

Pohyb a) je pohybem koncového bodu matematického kyvadla pro obvykle uvažované přibližné řešení platné při malých úhlech ϕ_0 .

$$\text{Pohyb b) } R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = t \sqrt{a^2 + b^2}, \quad v_R = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a_R = 0$$

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a}, \quad v_\varphi = 0, \quad a_\varphi = 0.$$

$$\text{c) } R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)t^2 + 2atd + d^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{bt}{at + d}$$

$$v_R = \frac{dR}{dt} = \frac{t(a^2 + b^2) + ad}{\sqrt{(a^2 + b^2)t^2 + 2atd + d^2}}, \quad v_\varphi = R \frac{d\varphi}{dt} = \frac{bd}{\sqrt{(a^2 + b^2)t^2 + 2atd + d^2}}$$

$$\text{d) } \left. \begin{aligned} R &= at \\ \tg \varphi &= \tg \omega t; \quad \varphi = \omega t \end{aligned} \right\} \quad R = \frac{a}{\omega} \varphi$$

Drahou pohybu je Archimedova spirála

$$v_R = a, \quad a_R = \frac{d^2 R}{dt^2} - R \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -a\omega^2$$

$$v_\varphi = a t \omega, \quad a_\varphi = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \left(R^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 2 a \omega$$

Úlohy

1. Po jaké křivce se pohybuje bod, jehož parametrické rovnice mají tvar

$$\begin{aligned}x_1 &= c \sin \omega t \\x_2 &= d \cos \omega t\end{aligned}$$

(c, d, ω jsou konstanty).

Zjistěte, zda se jedná o pohyb rovnoměrný a určete, v kterých bodech pohybu tečná složka zrychlení nulová.

2. Určete dráhu pohybu daného rovnicemi

$$\begin{aligned}x_1 &= 3 + 4 \cos t \\x_2 &= 2 + 5 \sin t\end{aligned}$$

jeho rychlost, zrychlení, tečnou a normálovou složku zrychlení.

3. Dokažte, že pro rovnoměrný kruhový pohyb

$$\begin{aligned}x_1 &= R \cos \omega t \\x_2 &= R \sin \omega t\end{aligned}$$

(R, ω konstanty) platí

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = 0$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = 0$$

4. Dokažte, že pro přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb platí mezi rychlostí v , zrychlením a a polohou hmotného bodu x vztah

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$

kde v_0 je rychlost a x_0 poloha bodu v čase $t = 0$.

5. Stanovte, jaké pohyby jsou dány následujícími parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned}\text{a) } x_1 &= \sin \frac{\pi}{2} t & \text{b) } x_1 &= \cos \frac{\pi}{2} t \\x_2 &= \sin \frac{\pi}{2} t & x_2 &= \sin \frac{\pi}{2} t \\ \text{c) } x_1 &= \cos^2 \frac{\pi}{2} t & \text{d) } x_1 &= \cos \frac{\pi}{2} t^2 \\x_2 &= \sin^2 \frac{\pi}{2} t & x_2 &= \sin \frac{\pi}{2} t^2\end{aligned}$$

6. Pohyb hmotného bodu je dán rovnicemi

$$\begin{aligned}\text{a) } x_1 &= A \cos \omega t & \text{b) } x_1 &= A \cos \omega t \\x_2 &= B \cos 2\omega t & x_2 &= B \cos 3\omega t\end{aligned}$$

Určete rovnice dráhy a nakreslete je pro $A = B = 1$

7. Určete parametrické rovnice pohybu hmotného bodu, který se nachází na obvodu válce valčícího se po rovině.

Válec má poloměr R , jeho střed S se pohybuje konstantní rychlostí $\vec{v}_k$. V čase $t = 0$ se vyšetřovaný hmotný bod dotýká roviny. Najděte též výrazy pro rychlost a zrychlení hmotného bodu. Je v některé fázi pohybu rychlost hmotného bodu vůči rovině nulová? Porovnejte rychlost a zrychlení v soustavě souřadné pevně spjaté s rovinou a v soustavě souřadné, která se vůči této soustavě pohybuje s rychlostí středu válce $\vec{v}_k$.

8. V kterém bodě dráhy při šikmém vrhu $x_1 = v_{01} t$, $x_2 = -v_{02} t + \frac{g}{2} t^2$ je tečná složka zrychlení nulová.

9. Bod koná harmonický kmit, v čase $t = 0$ je $x_0 = 0$, $v_0 = 62,8 \text{ cm/s}$ a bod vykoná za minutu 120 kmitů. Napište rovnici dráhy.

10. Pohyb bodu je dán parametrickými rovnicemi

$$x_1 = 15 t^2, \quad x_2 = 4 - 20 t^2$$

Určete dráhu bodu, vypočítejte velikost rychlosti a velikost zrychlení bodu.

Jak dlouhý je úsek dráhy mezi souřadnými osami a za jak dlouho jej bod proběhne. Určete též velikost rychlosti v bodě na ose x_1 a na ose x_2 a průměrnou rychlost v úseku mezi osami. Délku pokládejte za udanou v cm a čas v s.

11. Napište parametrické rovnice pro pohyb hmotného bodu, který koná harmonický pohyb v přímce $x_2 = x_1 - 4$. Rovnovážná poloha je v bodě $A [+2, -2]$, amplituda $S = 2\sqrt{2}$, doba kmity $T = 8 \text{ s}$ a v čase $t = 0$ souřadnice bodu jsou $[4, 0]$, délkové rozměry uvažujte v m nebo cm.

12. Je pohyb daný rovnicemi

$$\begin{aligned}x_1 &= R \cos \omega t \\x_2 &= R \sin \omega t \\x_3 &= k t\end{aligned}$$

rovnoměrný? R , k a ω jsou konstanty.

13. Pohyb je dán parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned}x_1 &= A \sin \omega t \\x_2 &= B \sin (\omega t + \alpha)\end{aligned}$$

Přepište jej do polárních souřadnic $x_1 = R \cos \varphi$; $x_2 = R \sin \varphi$ a určete složky rychlosti v_R , v_φ a zrychlení a_R , a_φ . Určete též plošnou rychlost pohybu

$$v_p = \frac{1}{2} R^2 \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|.$$

14. a) Dokažte, že rovnice

$$R = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

je rovnicí kuželoseček v polárních souřadnicích R, φ . Počátek soustavy souřadné ($R = 0$) je v ohnisku kuželoseček. Stanovte velikost ε pro elipsu, parabolu a hyperbolu.

- b) Určete složky rychlosti v_R , v_φ , plošnou rychlost v_p a složky zrychlení a_R , a_φ v případě, že hmotný bod probíhá elipsu s konstantní úhlovou rychlostí ω , tj. $\varphi = \omega t$, $R = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \omega t}$. Míří v tomto případě zrychlení do počátku soustavy souřadné, tj. do bodu $R = 0$?

15. Stanovte parametrické rovnice, složky rychlosti v_x, v_y, v_z a složky zrychlení a_x, a_y, a_z ve sférických souřadnicích

$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\x_2 &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\x_3 &= r \cos \vartheta\end{aligned}$$

pro pohyb hmotného bodu pohybujícího se rovnoměrně po povrchu země (předpokládáme ideální kouli o poloměru R) ve směru a) poledníku, b) rovnoběžky, c) ve směru jihovýchodním. Výrazy pro složky zrychlení a rychlosti viz poznámku u řešeného příkladu 5.

16. Stanovte jakými analytickými výrazy je možno vyjádřit naměřené výsledky uvedené v tabulkách

a)	t(s)	x(cm)	b)	t(s)	x(cm)	c)	t(s)	x(cm)
	0	2		0	0,29		0	1,3
	1	5,9		1	1,25		1	-1,4
	2	14,0		2	1,28		2	-1,7
	3	26,3		3	0,36		3	+2,8
	4	42,8		4	-0,88		4	14,5
	5	63,5		5	-1,40		5	35,8
				6	-0,94		6	69,1
				7	0,22			
				8	1,21			

17. Dva vlaky jedou vedle sebe po rovnoběžných kolejích, první rychlostí v_1 , druhý rovnoběžně s ním rychlostí v_2 . V okamžiku kdy se okna míjejí (jsou na společné kolmici ke směru pohybu) hodíme známým ve druhém vlaku balíček rychlostí v_0 . Jakým směrem musíme balíček hodit, aby vletěl do okna ke známým?

18. Po rovné silnici projíždí tank rychlostí 80 km/hod. Voják s pancéřovkou je kolmo vzdálen od silnice 30 m. Vystřelí v okamžiku, když tank je od něj vzdálen 100 m. Jaký úhel α musí svírat směr výstřelu se směrem, v kterém vidí voják tank v okamžiku výstřelu. Rychlost střely $v = 50$ m/s.

19. Jakou nejdelší expozici je možno volit, chceme-li vyfotografovat závodní automobil jedoucí po silnici rychlostí $v = 200$ km/hod. Naše vzdálenost od silnice je $h = 5$ m. Auto fotografujeme, když spojnice mezi námi a autem svírá s silnicí úhel α . Nejvyšší přípustné posunutí obrazu na filmu (rozmazání) budeme předpokládat $d = 10^{-2}$ mm a ohnisková délka objektivu $f = 5$ cm.

20. Jízdní řád říčního parníku udává pro jízdu z města A do města B 3 hod., z města B do města A 2 hod. Říční cesta mezi místy A a B je dlouhá 30 km. Jaká je předpokládaná průměrná rychlost parníku vůči vodě v_1 a průměrná rychlost proudu v_2 ?

21. Mějme dva hmotné body, které se pohybují v téže přímce. V čase $t = 0$ jsou body vzdáleny 10 m. Bod A se pohybuje přímočarým rovnoměrným pohybem rychlostí $v_A = 3$ m/s. Bod B se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením $a_B = 0,1$ m/s² a počáteční rychlostí $v_B = 1$ m/s. Vektory $\vec{a}_B$ a $\vec{v}_B$ jsou souhlasně rovnoběžné ($\vec{a}_B = k \vec{v}_B$, $k > 0$). Vyšetřete, kdy a kde se body potkají, když

- a) body se pohybují proti sobě ($\vec{v}_B = k \vec{v}_A$, $k < 0$),

- b) body se pohybují stejným směrem ($\vec{v}_B = k \vec{v}_A$, $k > 0$), bod B dohání bod A,

- c) body se pohybují stejným směrem, bod A v první fázi pohybu dohání bod B.

22. Dva hmotné body se pohybují rovnoměrným přímočarým pohybem, první z bodu A $[0,1]$ rychlostí $\vec{v}_A(3, -2)$, druhý z bodu B $[0, -1]$ rychlostí $\vec{v}_B(6, 4)$. Určete průsečík drah obou bodů. Najděte vektorový výraz pro časový průběh vzájemné polohy obou bodů, určete čas t_0 , kdy jsou si dva body nejbližší, nejmenší vzdálenost obou bodů a časový průběh úhlu, který svírá spojnice obou bodů s dráhou prvního bodu. Délky uvažujte v m, čas v s.

23. Vůz se může rozjíždět nejvýše se zrychlením a , brzdít nejvýše se zpožděním takéž rovným a . Jakým způsobem lze tímto vozem nejrychleji projet úsek dráhy L , vyjíždí-li vůz z klidu a na konci dráhy se má zastavit. Udejte tuto nejkratší dobu a nejvyšší rychlost, kterou při tomto pohybu vůz dosáhne.

24. Bod se pohybuje rovnoměrně po logaritmické spirále, tj. křivce, která v polárních souřadnicích má rovnici $R = a e^{b\varphi}$ ($a, b > 0$ konstanty, e základ přirozených logaritmů). Jak se mění zrychlení se vzrůstající hodnotou φ (stačí kvalitativní údaj).

25. Zrychlení bodu, který se pohybuje po přímce, je přímo úměrné rychlosti bodu a míří proti směru rychlosti ($\vec{a} = -k \vec{v}$, $k > 0$). Určete závislost dráhy bodu na čase.

2. Dynamika hmotného bodu

Řešené příklady

1. Automobil hmoty $m = 1000 \text{ kg}$ jede zatáčkou o poloměru $R = 200 \text{ m}$. Jeho tečné zrychlení $a_t = 1 \text{ m/s}^2$. Při vjezdu do zatáčky má automobil rychlost $v_0 = 30 \text{ km/hod}$. Stanovte časový průběh síly, která na automobil působí, číselně vyjádřete sílu při vjezdu do zatáčky a po dvaceti vteřinách jízdy zatáčkou.

Řešení:

Zrychlení automobilu $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$, kde $\vec{a}_t$ je tečná složka zrychlení a $\vec{a}_n$ normálová složka.

$$\text{Velikost } a_n = \frac{(a_t t + v_0)^2}{R},$$

čas $t = 0$ odpovídá okamžiku, kdy automobil vjíždí do zatáčky.

$$\text{Velikost } a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{a_t^2 + \frac{(a_t t + v_0)^4}{R^2}}.$$

Pro velikost síly dostáváme z 2. Newtonova zákona

$$F = ma = m \sqrt{a_t^2 + \frac{(a_t t + v_0)^4}{R^2}}.$$

Úhel α mezi směrem rychlosti auta a směrem zrychlení $\vec{a}$ je dán výrazem

$$\text{tg } \alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{(a_t t + v_0)^2}{R a_t}.$$

Úhel síly ke směru rychlosti je též α , protože směr síly je shodný se směrem zrychlení. Číselně dostáváme při vjezdu do zatáčky

$$a_n(0) = \frac{v_0^2}{R} = \frac{8,3^2}{200} = 0,35 \text{ m/s}^2; a(0) = 1 + 0,35^2 = 1,06 \text{ m/s}^2$$

a tedy $F(0) = ma(0) = 1060 \text{ N} = 108 \text{ kp}$; $\text{tg } \alpha(0) = 0,35$; tj. $\alpha(0) = 19^\circ 20'$.

Po 20 s jízdy

$$a_n(20) = \frac{(t a_t + v_0)^2}{R} = \frac{28,3^2}{200} = 4,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a(20) = \sqrt{1 + 4^2} = 4,12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F(20) = 4120 \text{ N} = 420 \text{ kp}, \text{tg } \alpha(20) = 4, \alpha(20) = 76^\circ.$$

2. Osvětlovadlo váhy $G = 100 \text{ kp}$ má být zavěšeno na tři závěsy, jejichž maximální dovolené zatížení $F_m = 80 \text{ kp}$. Z konstrukčních důvodů musí nad osvětlovadlem zůstat kruh o poloměru $R = 1 \text{ m}$, v kterém nemůže být závěs upevněn. V jaké nejmenší vzdálenosti h od stropu může být osvětlovadlo.

Řešení: Podmínka rovnováhy dává

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{G} = 0,$$

kde $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ a $\vec{F}_3$ jsou vektory sil přenášených závěsy a $\vec{G}$ vektorově braná váha osvětlovadla. Předpokládáme-li symetrické rozložení závěsu, které je pro naši úlohu nejvýhodnější, a vezmeme-li složku rovnice rovnováhy do svislého směru (kladný směr osy míří vzhůru), dostáváme

$$3F \cos \alpha - G = 0.$$

Velikost síly přenášené kterýmkoliv vláknem je označena F , úhel mezi svislým směrem a směrem závěsu je značen α (viz obr. 2,1) a G je velikost váhy osvětlovadla.

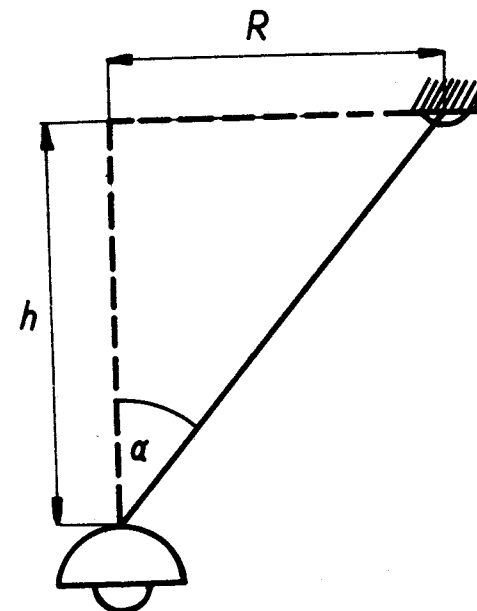
pro mezní úhel α_m dostáváme podmínku

$$\cos \alpha_m = G/3F_m = 5/12.$$

Vzdálenost h_m je pak dána rovnicí

$$h_m = R/\text{tg } \alpha_m = 0,46 \text{ m}.$$

při menší vzdálenosti h síla přenášená závěsy překročí hodnotu F_m .



obr. 2,1

3. Jaký pohyb koná hmotný bod v tíhovém poli zemském, můžeme-li odpor prostředí vystihnout silou $\vec{F}$ úměrnou rychlosti $\vec{v}$ mířící proti rychlosti ($\vec{F} = -k\vec{v}$)

Řešení:

Pohybová rovnice hmotného bodu v uvedeném případě má tvar

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m\vec{g} - k \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (1)$$

kde $\vec{r}$ je označen polohový vektor bodu a $\vec{g}$ je gravitační zrychlení. Zvolíme-li systém souřadný s vodorovnou osou x_1 a svislou osou x_2 mířící vzhůru, můžeme rovnici (1) rozepsat do složek

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k \frac{dx_1}{dt} \quad (2)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -mg - k \frac{dx_2}{dt}$$

Třetí složku nemusíme uvažovat, neboť pohyb je zřejmě rovinný. Dostáváme tak pro x_1 a x_2 lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Jejich řešením dostáváme pro x_1 a x_2 obecné výrazy

$$\begin{aligned} x_1 &= A e^{-kt/m} + B \\ x_2 &= C e^{-kt/m} - mgt/k + D, \end{aligned} \quad (3)$$

které jsou parametrickými rovnicemi hledaného pohybu. Volitelné konstanty A, B, C, D se určí z počátečních podmínek pohybu. Uvažujeme-li např., že v čase $t = 0$ je $x_1(0) = x_2(0) = 0$ a $v_1(0) = v_{01}, v_2(0) = v_{02}$, dostáváme pro určení konstant A, B, C, D rovnice

$$0 = x_1(0) = A + B$$

$$0 = x_2(0) = C + D$$

$$v_{01} = \frac{dx_1}{dt}(0) = -Ak/m$$

$$v_{02} = \frac{dx_2}{dt}(0) = -Ck/m - mg/k$$

$$A = -B = -v_{01} m/k;$$

$$C = -D = -v_{02} m/k - m^2 g/k^2$$

Po dosazení těchto konstant do (3) dostaneme pro udané počáteční podmínky řešení

$$x_1 = (v_{01} m/k)(1 - e^{-kt/m})$$

$$x_2 = (v_{02} m/k + m^2 g/k^2)(1 - e^{-kt/m}) - mgt/k$$

Toto řešení má tu vlastnost, že pro $t \rightarrow \infty$, $x_1 \rightarrow v_{01} m/k$, $v_1 \rightarrow 0$ a $v_2 \rightarrow -mg/k$. Pohyb se tedy pro dlouhé doby blíží rovnoměrnému pohybu ve směru záporné osy x_2 ve vzdálenosti $v_{01} m/k = B$ od počátku vrhu.

4. Na částici nabitou elektrickým nábojem q pohybující se rychlostí $\vec{v}$ magnetickým polem indukce $\vec{B}$ působí síla $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$. Jakou dráhu koná bod s hmotou a nábojem q v homogenním magnetickém poli?

Řešení: Pohybová rovnice hmotného bodu má tvar

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1)$$

Zvolíme soustavu souřadnou tak, že 1. osa soustavy míří ve směru magnetické indukce $\vec{B}$, tj. tak, že vektor $\vec{B}$ má složky $(B, 0, 0)$, a rozepíšeme rovnici (1) do složek

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = q B v_3 \quad (2)$$

$$m \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -q B v_2$$

Z první rovnice soustavy (2) plyne, že

$$x_1 = v_1 t + K_1, \quad (3)$$

kde v_1 je rychlost částice ve směru 1. osy souřadné. Uvědomíme-li si, že $dx_2/dt = v_2$ a $dx_3/dt = v_3$, přepíšeme druhé dvě rovnice soustavy (2) na tvar

$$m \frac{dv_2}{dt} = q B v_3 \quad (4)$$

$$m \frac{dv_3}{dt} = -q B v_2$$

Tuto soustavu dvou diferenciálních rovnic pro dvě neznámé funkce $v_2(t)$ a $v_3(t)$ budeme řešit tak, že vypočteme z první rovnice

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{m}{qB} \frac{d^2 v_2}{dt^2}$$

a tento výsledek dosadíme do druhé rovnice. Dostaneme tak diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty pro neznámou funkci $v_2(t)$

$$\frac{d^2 v_2}{dt^2} + \frac{q^2 B^2}{m^2} v_2 = 0$$

Její řešení dostáváme

$$v_2 = A \sin(qBt/m + \alpha)$$

a dosadíme-li tento výsledek do první z rovnic (4)

$$v_3 = A \cos(qBt/m + \alpha).$$

Z výrazů pro v_2 a v_3 dostáváme potom integrací

$$x_2 = -(mA/qB) \cos(qBt/m + \alpha) + K_2 \quad (5)$$

$$x_3 = (mA/qB) \sin(qBt/m + \alpha) + K_3.$$

Rovnice (5) spolu s rovnicí (3) jsou parametrickými rovnicemi pohybu hmotného bodu a ukazují, že se bod pohybuje rovnoměrně po šroubovici s kruhovou podstavou, jejíž poloměr $R = mA/qB$. Hodnotu konstanty A lze stanovit z rovnic pro v_2 a v_3 , platí $A = \sqrt{v_2^2 + v_3^2}$. Přitom je jedno, pro který okamžik výraz $v_2^2 + v_3^2$ počítáme, protože tento výraz, stejně jako velikost rychlosti v , zůstává po celou dobu pohybu konstantní. Hodnoty konstant K_1 , K_2 , K_3 a α jsou závislé na postavení soustavy souřadné vzhledem k místu a směru, kterým částice do pole vniká.

Poznámka: K závěru, že bod se pohybuje rovnoměrně po šroubovici, lze dojít přímo z rovnice (1), z které plyne, že zrychlení $\vec{a}$ je kolmé ke směru rychlosti $\vec{v}$ bodu. Zrychlení má tedy pouze normálovou složku $\vec{a}_n$. Tečná složka zrychlení $\vec{a}_t$ je nulová a z rovnice $dv/dt = a_t$ plyne, že velikost $|\vec{v}|$ je konstantní, pak ovšem je konstantní i zrychlení $\vec{a} = \vec{a}_n = (q/m)(\vec{v} \times \vec{B})$ a tedy i poloměr oskulační kružnice $R_0 = v^2/a_n$. Odtud lze již usoudit, že pohyb bodu je rovnoměrným pohybem po šroubovici.

5. Určete zrychlení a namáhání vláken T_1 a T_2 soustavy z obr. 2,2.

Písmena m_1 , m_2 a m_3 značí hmoty jednotlivých částí soustavy. Koeficient vlečného tření mezi bloky o hmotě m_2 , m_3 a nakloněnou rovinou je f .

Řešení:

Zrychlení soustavy určíme z druhého Newtonova zákona $F = ma$. Celková síla působící na soustavu $F = m_1 g - (m_2 + m_3) g \sin \alpha - (m_2 + m_3) f g \cos \alpha$ a hmota soustavy $m = m_1 + m_2 + m_3$, odtud zrychlení

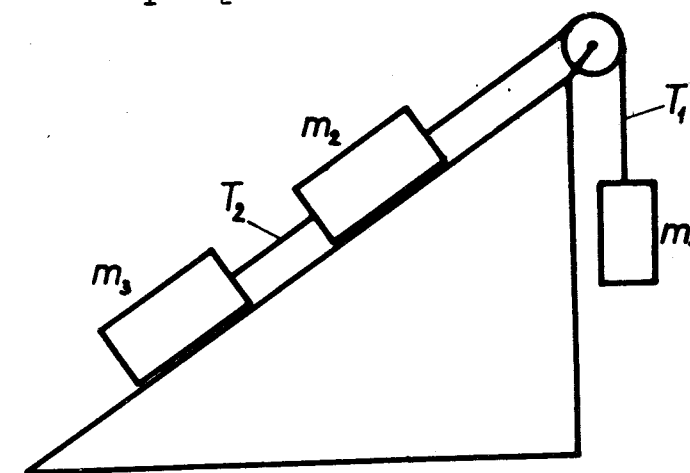
$$a = \frac{m_1 g - (m_2 + m_3)(g \sin \alpha + f g \cos \alpha)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Ze způsobu vyjádření síly plyne, že zrychlení a bude mít kladnou hodnotu, když blok o hmotě m_1 bude klesat.

Uvážíme-li, že na část soustavy o hmotě m_1 působí pouze tíže zemská a síla T_1 přenášená vláknem, dostáváme pro ni pohybovou rovnici

$$m_1 a = m_1 g - T_1,$$

z které plyne pro namáhání vlákna



obr. 2,2

$$T_1 = m_1 (g - a) = \frac{m_1(m_2 + m_3)(g + g \sin \alpha + f g \cos \alpha)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Z pohybové rovnice pro pohyb částí soustavy o hmotě m_3

$$m_3 a = T_2 - m_3 g \sin \alpha - m_3 f g \cos \alpha$$

určíme hodnotu síly

$$T_2 = \frac{m_1 m_3 g (1 + \sin \alpha + f \cos \alpha)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Výrazy pro a , T_1 a T_2 lze též získat tak, že napíšeme pohybové rovnice

$$m_1 a = m_1 g - T_1$$

$$m_2 a = T_1 - T_2 - m_2 g \sin \alpha - f m_2 g \cos \alpha$$

$$m_3 a = T_2 - m_3 g \sin \alpha - f m_3 g \cos \alpha$$

pro všechny tři části soustavy a tyto tři rovnice o třech neznámých řešíme.

6. Určete dráhu, rychlost a zrychlení částice, která odlétla z otáčejícího se kotouče, vzhledem k soustavě souřadné spjaté s kotoučem. Kotouč se otáčí úhlovou rychlostí ω v tíhovém poli ve vodorovné rovině a jeho poloměr je R . Částice se před opuštěním kotouče nacházela na jeho obvodě a v okamžiku opuštění byla její rychlost vůči kotouči nulová. Jakým silovým působením lze vysvětlit zrychlení částice vůči soustavě souřadné spjaté s kotoučem?

Řešení:

Osu x_3 soustavy souřadné položíme do osy otáčení kotouče a necháme ji mířit svisle vzhůru. Osy x_1 a x_2 budou potom v rovině otáčení kotouče; zvolíme je tak, aby osy x_1 , x_2 , x_3 v uvedeném pořadí tvořily pravotočivý systém a osa x_2 procházela místem, kde částice opustila kotouč. Kromě této soustavy spjatí s kotoučem zvolíme soustavu pevnou v prostoru (budeme ji považovat za inerciální), jejíž osa x'_3 splyne s osou x_3 a v čase $t = 0$ splynou osy x'_1 s x_1 a x'_2 s x_2 . V této čárkované soustavě koná částice vodorovný vrh a parametrické rovnice jejího pohybu mají tvar

$$x'_1 = v_0 t, \quad x'_2 = R, \quad x'_3 = -(g/2)t^2, \quad (1)$$

kde vzhledem k podmínkám příkladu lze položit $v_0 = -R\omega$; g je tíhové zrychlení. Transformační rovnice mezi soustavou souřadnou pevnou v prostoru (čárkovanou) a soustavou spjatou s kotoučem (necárkovanou) mají tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos \omega t + x'_2 \sin \omega t \\ x_2 &= -x'_1 \sin \omega t + x'_2 \cos \omega t \\ x_3 &= x'_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Dosadíme-li z (1) do (2), dostáváme parametrické rovnice pohybu částice v soustavě souřadné spjaté s kotoučem

$$\begin{aligned} x_1 &= -\omega R t \cos \omega t + R \sin \omega t \\ x_2 &= \omega R t \sin \omega t + R \cos \omega t \\ x_3 &= -(g/2) t^2 \end{aligned}$$

odtud pro složky vektoru rychlosti dostáváme

$$v_1 = \omega^2 R t \sin \omega t$$

$$v_2 = \omega^2 R t \cos \omega t$$

$$v_3 = -gt$$

a pro složky vektoru zrychlení

$$a_1 = \omega^2 R \sin \omega t + \omega^3 R t \cos \omega t$$

$$a_2 = \omega^2 R \cos \omega t - \omega^3 R t \sin \omega t$$

$$a_3 = -g.$$

Rozepíšeme-li a_1 jako

$$a_1 = \omega^2 R \sin \omega t - \omega^3 R t \cos \omega t + 2\omega^3 R t \cos \omega t,$$

je zřejmé, že jej můžeme napsat v tvaru

$$a_1 = \omega^2 x_1 + 2v_2 \omega.$$

Analogicky lze a_2 převést na tvar

$$a_2 = \omega^2 x_2 - 2v_1 \omega.$$

Tyto složky zrychlení lze vysvětlit působením síly odstředivé a síly Coriolisovy. Kromě těchto zdánlivých sil působí na částici ještě tíže, která se projeví ve třetí složce a_3 zrychlení.

7. Z cisternového vozu, který se pohybuje po vodorovných kolejích, vytéká kolmo na směr pohybu vozu kapalina. Budeme předpokládat, že hmota kapaliny vyteká za jednotku času je konstantní ($\frac{dm}{dt} = K$). Vůz je tažen po kolejích stálou silou F . Určete časový průběh rychlosti vozu. V čase $t = 0$ je rychlost vozu v_0 a hmota vozu včetně kapaliny m_0 . Neuvažujte vliv tření a otáčivých částí vozu na průběh pohybu.

Řešení:

Jelikož složka vzájemné rychlosti cisterny a kapaliny do směru rychlosti je nulová, nemusíme pro řešení problému uvažovat hybnost vyteké kapaliny jako při pohybu raket (viz řešený příklad 8, kap. 6). Stačí uvažovat složku druhého Newtonova zákona do směru pohybu $F = ma$, z které, uvážíme-li ubývání hmoty m dané výrazem $m = m_0 - Kt$, dostáváme pro zrychlení a pohybu vyjádření

$$a = \frac{F}{m_0 - Kt}.$$

Z výrazu pro zrychlení určíme rychlost v pohybu integrováním

$$v = \int a dt = \int \frac{F}{m_0 - Kt} dt = (F/K) \ln \frac{m_0}{m_0 - Kt} + k.$$

Integrační konstanta $k = v_0$, protože v čase $t = 0$, $v = v_0$.

Úlohy

1. Stanovte sílu, která způsobuje pohyby bodů o hmotě m dané parametrickými rovnicemi

a) $x_1 = a_1 t + b_1$	b) $x_1 = a_1 t^2 + b_1 t$	c) $x_1 = a_1 t^2$
$x_2 = a_2 t + b_2$	$x_2 = a_2 t^2$	$x_2 = a_2 t^3$
d) $x_1 = a_1 \sin \omega t$	e) $x_1 = a_1 \sin \omega t^2$	f) válcové souřadnice:
$x_2 = a_2 \cos \omega t$	$x_2 = a_1 \cos \omega t^2$	$r = a_1; \varphi = \omega t; z = a$

V rovnicích $a_1, a_2, b_1, b_2, \omega$ značí konstanty, t je čas. Udejte, které z pohybů jsou způsobeny stálou nebo centrální silou.

2. Je možno projet bez smyku neklopenou zatáčku poloměru $R = 100$ m rychlostí 80 km/hod., klesne-li za deště koeficient vlečného tření f mezi vozovkou a pneumatikami na hodnotu $f = 0,2$?

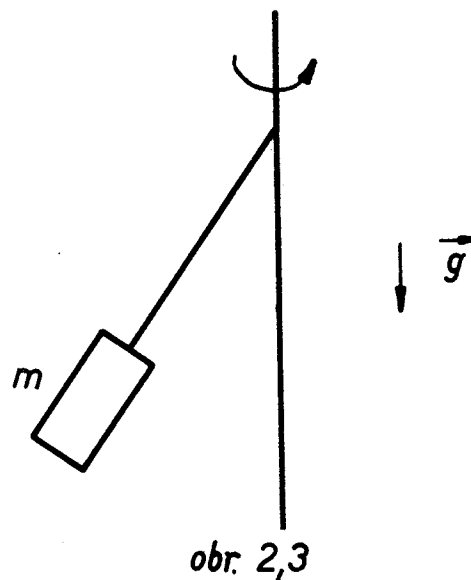
3. Určete časový průběh namáhání vlákna matematického kyvadla délky l . Činíme obvyklý předpoklad přibližně splněný pro malé kmity, že úhel φ mezi svislým směrem a vláknem kyvadla se s časem mění dle zákona $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$.

4. Nit snese namáhání (síla přenášená nití, která způsobuje její napětí) $T = 2$ kp. Na niti je upevněno závaží hmoty $m = 1$ kg. a) S jakým největším zrychlením a lze závaží upevněné na niti zdvihat. b) Závaží roztocíme v tíhovém poli kolem svislé osy způsobem znázorněným na obr. 2,3. Jaká je úhlová rychlost otáčení ω , když namáhání nitě se právě rovná T ? Délka závěsu $l = 1$ m.

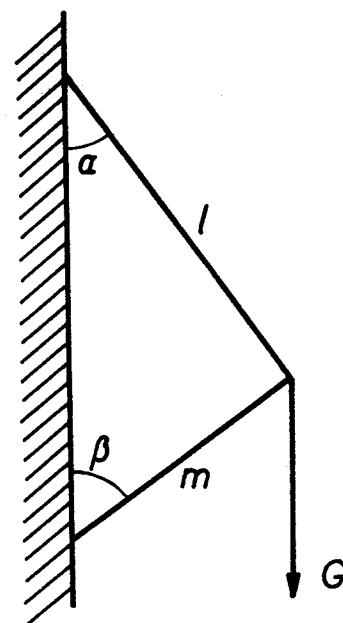
5. Na desce konající harmonický pohyb $x = A \sin \omega t$ ve vodorovném směru spočívá závaží hmoty m . Koeficient vlečného tření mezi deskou a závažím $f = 0,5, \omega = 10 \text{ s}^{-1}$. Při jaké amplitudě A začne závaží po desce klouzat?

6. Upevnění břemene G je provedeno dle obr. 2,4. Určete velikost i charakter sil přenášených tyčemi l a m . Klouby spojující tyče se stěnou a tyče navzájem považujte za volně otočné.

7. Homogenní koule váhy G , poloměru R je v místě O zavěšena spolu se závažím váhy P způsobem naznačeným na obr. 2,5. Stanovte úhel α a sílu F působící na kouli od závěsu závaží P .



obr. 2,3

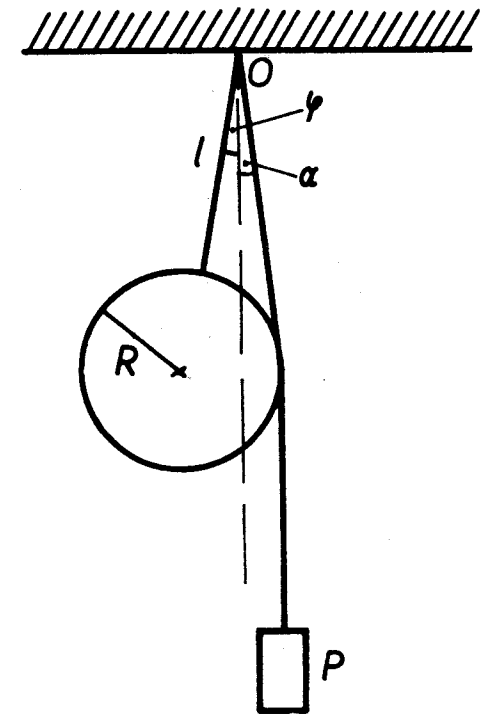


obr. 2,4

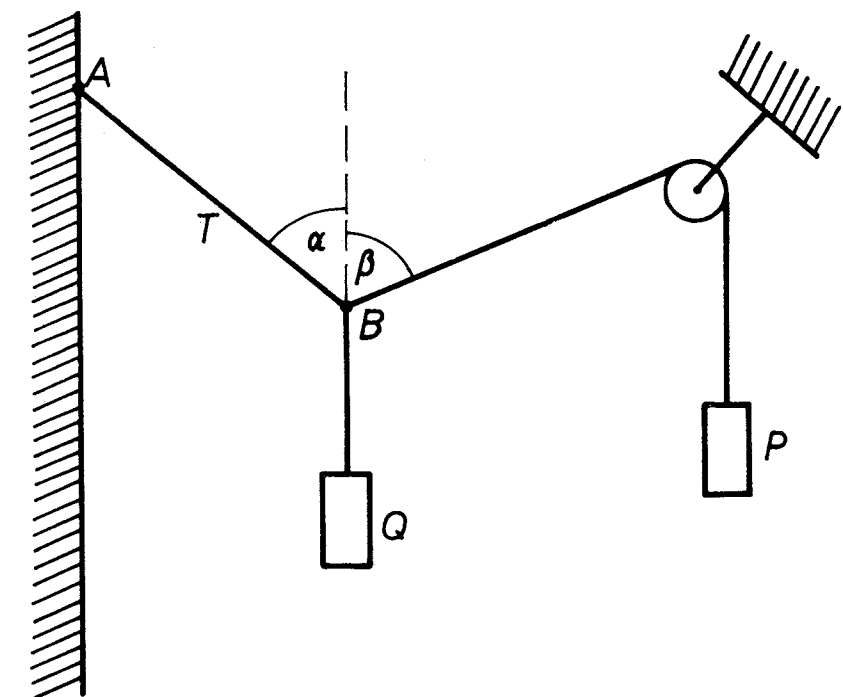
8. Závaží hmoty $Q = 10$ kg je uvázáno (vzdálenost AB je stálá) na laně způsobem naznačeném na obr. 2,6. Jak velké závaží P je třeba volit, aby úhel $\alpha = 45^\circ$ a úhel $\beta = 60^\circ$. Jak velké bude v tomto případě namáhání v úseku lana AB .

9. Na obr. 2,7 je nárysem a půdorysem naznačena konstrukce jeřábu. Všechny spoje jsou kloubové. Platí podmínky: $AB = BC = AD = AE$, spojnice AE a AD svírají spolu pravý úhel. Část BCA je otočná kolem svislé osy. Stanovte maximální namáhání v jednotlivých částech konstrukce a určete pro jaký úhel α (viz obr.) nastanou; omezte se na interval $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$.

10. V tíhovém poli zemském jsou svisle nad sebou dvě místa vzdálená 10 m. Z vrchního místa vypustíme hmotný bod s nulovou počáteční rychlostí. Současně ze spodního místa vypustíme druhý hmotný bod. Jakou počáteční rychlostí v_0 musíme tento hmotný bod směrem vzhůru vypustit, aby se oba hmotné body setkaly mezi místy svého vypuštění?



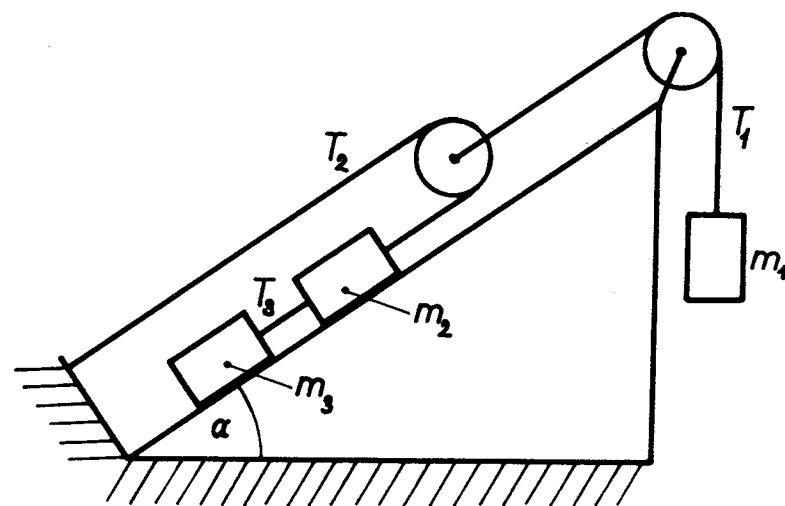
obr. 2,5



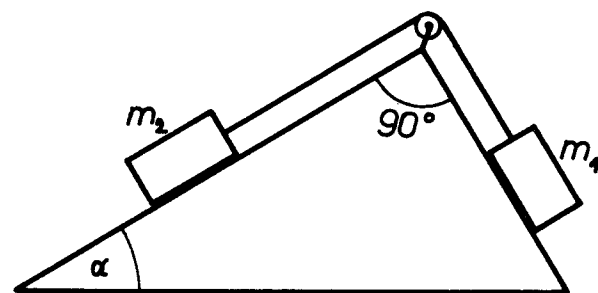
obr. 2,6

11. Spodní okraj otevřeného okna je ve výšce 5 m nad ulicí a 1 m nad podlahou místnosti. Okno je od ulice vzdáleno 10 m. Jak nejbližší k oknu (vzdálenost d) může dopadnout míč na podlahu místnosti, je-li vržen z ulice počáteční rychlostí v_0 ?

18. Síla $\vec{F}$ působící na náboj q v elektrickém poli intenzity $\vec{E}$ je dána výrazem $\vec{F} = q\vec{E}$. Mezi deskami kondenzátoru je homogenní elektrické pole o intenzitě $E = 300 \text{ V/m}$. Do tohoto pole vletí ve směru rovnoběžném s deskami kondenzátoru elektron, jehož kinetická energie $W_0 = 10^{-17} \text{ J}$. a) Jakou dráhu bude elektron konat v prostoru mezi deskami kondenzátoru? b) Jak bude vzdálen (d) v okamžiku opuštění kondenzátoru od přímky, v které se původně pohyboval, je-li jeho dráha mezi deskami kondenzátoru dlouhá $l = ? \text{ cm}$. c) Jak se změní směr pohybu elektronu po průletu deskami kondenzátoru? d) Jak se změní jeho kinetická energie?
19. Síla $\vec{F}$ působící na náboj q v magnetickém poli indukce $\vec{B}$ je $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$. Elektron (náboj e) vletí do homogenního magnetického pole indukce $\vec{B}$ rychlostí $\vec{v}$, jejíž směr je kolmý ke směru magnetické indukce $\vec{B}$. a) Jaká bude dráha elektronu v magnetickém poli. b) Jaká bude vzdálenost d elektronu od přímky, v které se původně pohyboval, v okamžiku, kdy opustí magnetické pole, je-li tloušťka magnetického pole ve směru původního pohybu elektronu l ? c) Jaký úhel α bude svírat dráha elektronu po opuštění magnetického pole s jeho dráhou před vstupem do magnetického pole? d) Jak se změní energie elektronu při průchodu magnetickým polem?
20. Jakým magnetickým polem můžeme způsobit, aby se elektron vyšetřovaný v případě 18) pohyboval přímočarým rovnoměrným pohybem i mezi deskami kondenzátoru?

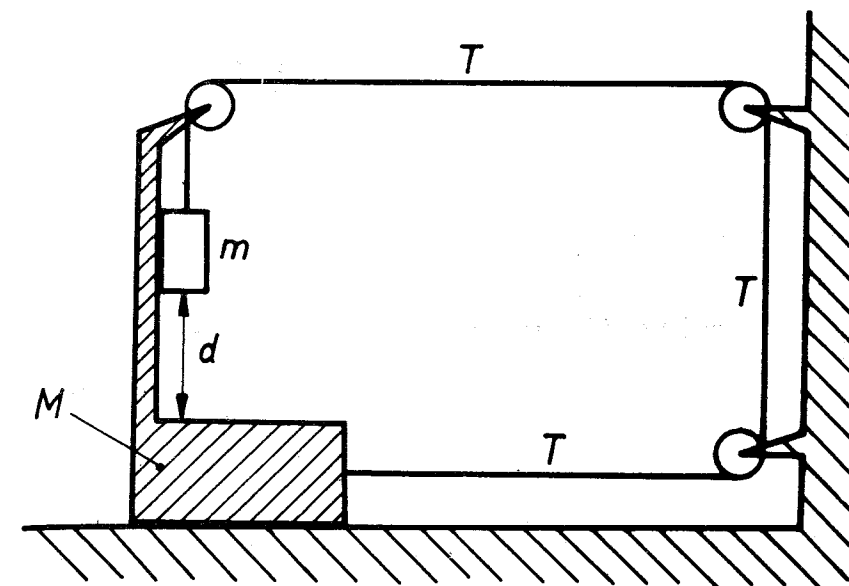


obr. 2,11



obr. 2,12

21. Máme soustavy kladek a hmot a vláken dle obr. 2,10. Vypočítejte zrychlení a_1 , a_2 hmot m_1 , m_2 a namáhání vláken T (sílu přenášenou vláknem) při pohybu soustav. Kladky a vlákna pokládejte za nehmotné, tření neuvažujte.
22. Systém kladek, hmot a vláken je znázorněn na obr. 2,11. Určete zrychlení hmot a namáhání vláken. Kladky a vlákna pokládejte za nehmotné, tření neuvažujte.
23. Po dvou nakloněných rovinách svírajících spolu pravý úhel se smýkají bez tření hmoty m_1 a m_2 spojené vláknem jdoucím přes kladku. Jedna z rovin svírá s vodorovnou rovinou úhel α a průsečík rovin je vodorovný (obr. 2,12). Stan-



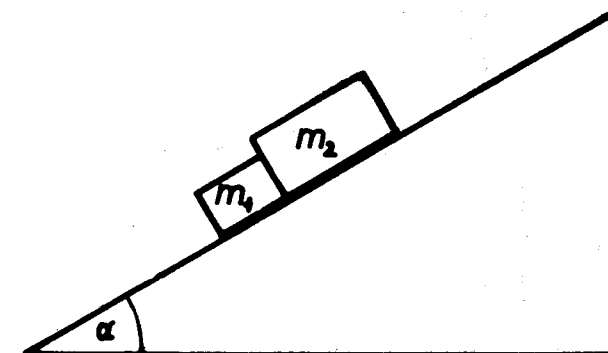
obr. 2,13

te sílu působící na kladku. Tření, hmoty kladek a vláken zanedbejte.

v systému znázorněném na obr. 2,13 zanedbáme tření mezi všemi částmi soustavy, hmoty kladek a vláken. Určete dobu τ , za kterou dopadne hmota m vypuštěná z výšky d nulovou počáteční rychlostí na rám M .

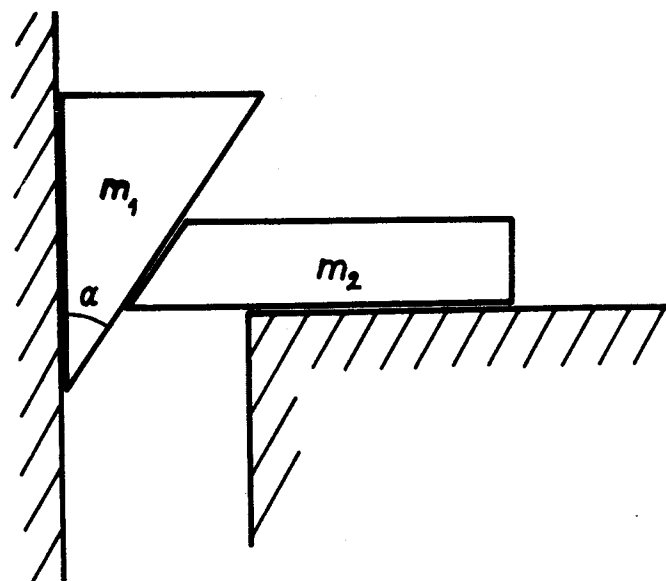
Na nakloněné rovině jsou dvě tělesa hmoty m_1 a m_2 (obr. 2,14). Koeficient vlečného tření mezi tělesem hmoty m_1 a nakloněnou rovinou je f_1 , mezi tělesem hmoty m_2 a nakloněnou rovinou je f_2 . Stanovte zrychlení tělesa a sílu T působící mezi nimi.

Na nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel α , je deska hmoty m_1 a na ní hranol hmoty m_2 . Koeficient vlečného tření mezi deskou a nakloněnou rovinou je f_1 , mezi deskou a hranolem f_2 . Určete zrychlení a_1 desky a zrychlení a_2 hranolu.

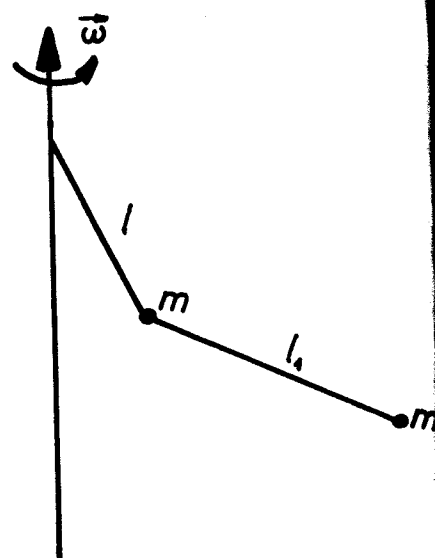


obr. 2,14

- Klín hmoty m_1 s vrcholovým úhlem α se pohybuje bez tření podél svislé stěny. Z druhé strany klín souvisí s tělesem hmoty m_2 klouzajícím bez tření po vodorovné desce (obr. 2,15). Koeficient vlečného tření v rovině mezi klínem a tělesem je f . Stanovte zrychlení klínu a_1 , zrychlení tělesa a_2 , složku síly T působící kolmo na rovinu styku tělesa a klínu, kolmý tlak N na svislou stěnu. Jak velké musí být f , aby pohyb nenastal.
- Kladku z obr. 2,10 a připevníme na jedno rameno vah, zabrzdíme ji a váhy vyvážíme. Změní se rovnováha vah při odbrzdění kladky?
- Koule hmoty m zavěšená na niti délky l je roztočena kolem svislé osy. Jaký úhel α svírá závěs s osou otáčení? Jaké je namáhání T niti? Přivěsíme-li ke kouli závěsem délky l_1 ještě jednu kouli hmoty m_1 (obr. 2,16), budou závěsy l a l_1 ležet v jedné přímce?

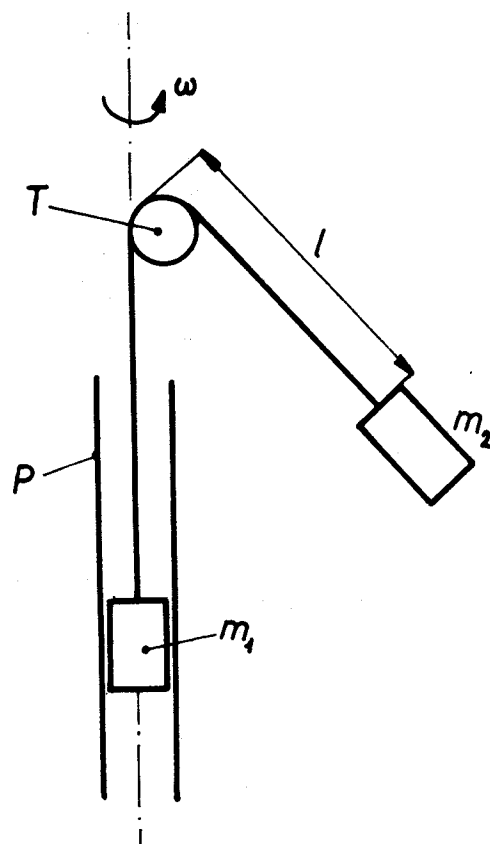


obr. 2,15



obr. 2,16

30. Chlapec nese bandasku s mlékem. Točí s ní ve svislé rovině. Vzdálenost hladiny mléka od chlapcova ramena pokládejte za rovnu 80 cm. Jekou nejmenší frekvenci musí chlapec točit s bandaskou, aby mléko nevytlil?



obr. 2,17

31. Koule poloměru $R = 10$ cm leží na vodorovné rovině. Z jejího nejvyššího bodu vypustíme s nulovou počáteční rychlostí bod o hmotě m . Jaký pohyb bude bod konat a v jaké vzdálenosti D od místa, kde se koule dotýká roviny, dopadne na tuto rovinu? Tření neuvažujte.

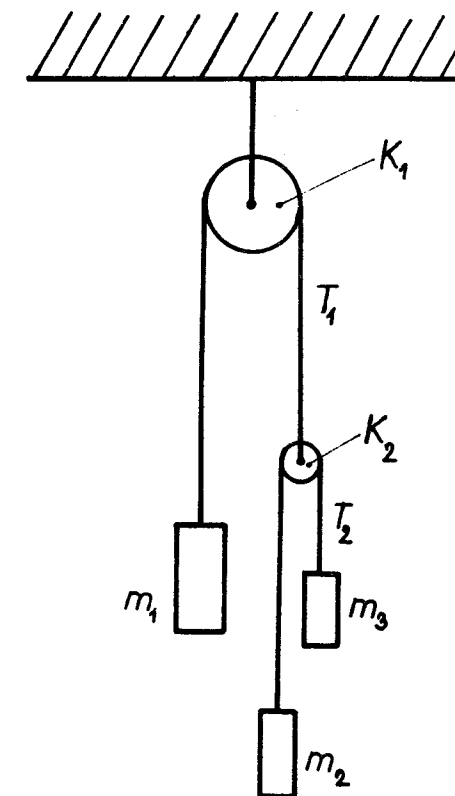
32. Dvě tělesa hmot m_1 a m_2 jsou spojena vláknem přehozeným přes vodorovnou tyč T , která se točí stálou úhlovou rychlostí ω kolem svislé osy. Těleso hmoty m_1 se pohybuje uvnitř svislé trubice P , která se otáčí společně s tyčí T (obr. 2,17), těleso hmoty m_2 je v pohybu omezeno pouze závěsným vláknem. Velikost síly tření působící mezi tělesem hmoty m_1 a trubicí P je dána výrazem $F = F_0 + kv$, kde F_0 a k jsou konstanty, v rychlost tělesa. Koeficient statického vlečného tření mezi vláknem a tyčí T je f_0 . Stanovte rozmezí délek závěsu tělesa hmoty m_2 , pro které bude

systém při rotaci v rovnováze. Udejte číselné řešení pro $m_1 = 0,15$ kg, $m_2 = 0,1$ kg, $F_0 = 0,1$ N, $f_0 = 0,1$, $\omega = 10$ s⁻¹.

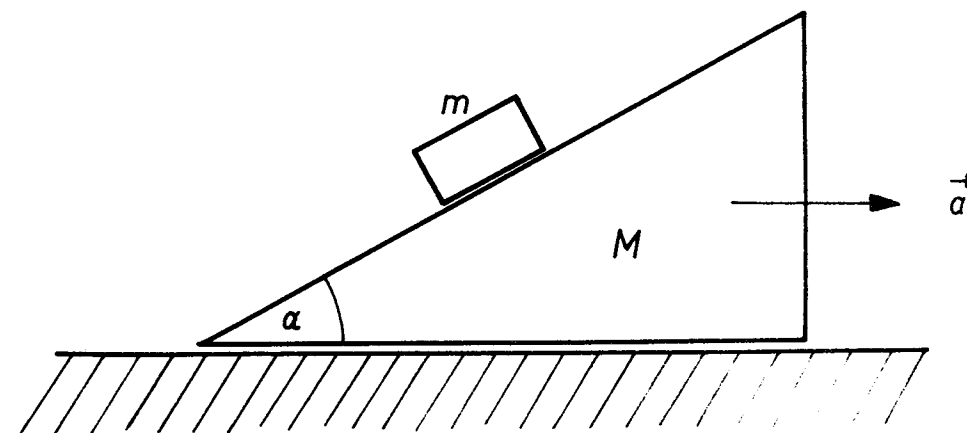
33. Určete zrychlení a_1 , a_2 , a_3 těles o hmotách m_1 , m_2 , m_3 a namáhání vláken T_1 , T_2 v soustavě dle obr. 2,18. Kladky pokládejte za nehmotné, tření zanedbejte.
34. Jakou silou je třeba působit na soustavu z obr. 2,12, aby tělesa hmot m_1 a

nekonala vůči hranolu zrychlený pohyb (případně zůstala vůči hranolu v klidu). Hmotu hranolu je M a hranol může bez tření klouzat po vodorovné rovině.

35. Vypočítejte zrychlení a tělesa hmoty M , na kterém spočívá způsobem naznačeným na obr. 2,19 těleso hmoty m . Tření v obou styčných plochách pokládejte za nulové.
36. Těleso se nachází u paty nakloněné roviny. Nakloněná rovina s úhlem sklonu 30° se proti němu začne pohybovat se zrychlením $a = 7$ m/s². Jaký pohyb bude těleso konat?
37. Jaké je zrychlení a výtahu, když-li v něm matematické kyvadlo délky $l = 1$ m s dobou kmitu a) $T = 2,3$ s, b) $T = 1,8$ s, c) kyvadlo volně krouží kolem bodu závěsu, d) kyvadlo kývá tak, že jeho rovnovážná poloha je kolmo nad bodem závěsu a doba kmitu $T = 4,2$ s.
38. Stanovte jak se vlivem otáčení země odchýlí od kolmice těleso vypuštěné nulovou počáteční rychlostí z výše $h = 100$ m na 50° severní šířky.
39. Jaký je poměr Coriolisovy F_c a gravitační G síly pro těleso, které se v zeměpisné šířce 50° pohybuje rychlostí $v = 100$ km/h po poledníku?
40. Stanovte dobu T , za kterou se rovina kyvu Foucaultova kyvadla otočí jednou kolem dokola v zeměpisné šířce φ .



obr. 2,18



obr. 2,19

41. Lokomotiva táhne po rovině vlak stálou silou. Vlak o hmotě M jede rovnoměrně až do okamžiku, kdy se poslední vagón o hmotě m odtrhl. Ostržený vagón se zastavil po projetí dráhy l . Stanovte, jaká byla vzdálenost D vlaku od vagónu, když se vagón zastavil. Tření každé části vlaku je úměrné její váze.
42. Válcová nádoba průměru $D = 1$ m, jejíž osa je svislá, je naplněna vodou. Nádo-

bu vlečeme ve vodorovném směru silou $F = 80 \text{ N}$. Ve dně nádoby je kruhový otvor průměru $d = 0,1 \text{ m}$, kterým může voda volně odtékat. Jaké bude zrychlení a rychlost nádoby v okamžiku, kdy všechna voda vyteče? Na začátku pohybu byla nádoba v klidu a výška vody v ní byla $H = 1 \text{ m}$. Vlastní hmota nádoby $M_0 = 20 \text{ kg}$.

3. Odvozené mechanické veličiny

Řešené příklady

1. Závaží váhy $G = 5 \text{ kp}$ je zdviženo ze země do výše $\ell = 2 \text{ m}$ silou velikosti
- $F_1 = 150 \text{ Newtonů}$,
 - $F_2 = (kx + G) \text{ kp}$, kde $k = 7,5 \text{ kp/m}$ a x je vzdálenost závaží od země v metrech.
- Určete práci sil F_1 a F_2 a sestrojte graf závislosti kinetické energie závaží na výšce od země v obou případech.

Řešení:

a) Působí-li na těleso stálá síla ve směru jeho dráhy, je práce $A = F \cdot s$, kde s je dráha, po které síla působí a F je velikost této síly.

Síla F_1 při vyzdvižení tělesa váhy 5 kp do výše 2 m vykoná práci

$$A_1 = 150 \cdot 2 = 300 \text{ J}.$$

Přírůstek kinetické energie se rovná práci vnějších sil. Závaží bylo na zemi v klidu a jeho počáteční kinetická energie byla nulová. Na závaží kromě síly F_1 působí ještě síla opačného směru, váha tělesa $G = mg$. Odpor prostředí zanedbáváme. Kinetickou energii E_{K1} ve výši h nad zemí určíme ze vztahu

$$E_{K1} = F_1 \cdot h - G \cdot h = (F_1 - G)h = (100,95 \cdot h) \text{ Joulů},$$

kde h je v metrech.

b) Síla F_2 roste lineárně se vzdáleností tělesa od země. Tato síla vykoná práci

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^\ell F_2 \cdot dx = \int_0^\ell kx \cdot dx + \int_0^\ell G \cdot dx = \\ &= \left[kx^2/2 \right]_0^\ell + [Gx]_0^\ell = k\ell^2/2 + G\ell = 25 \text{ kp} \cdot \text{m} = 245,25 \text{ J} \end{aligned}$$

pro kinetickou energii E_{K2} závaží ve výši h nad zemí platí

$$\begin{aligned} E_{K2} &= \int_0^h F_2 \cdot dx - \int_0^h G \cdot dx = \int_0^h (kx + G) \cdot dx - \int_0^h G \cdot dx = \\ &= kh^2/2 = (3,75 h^2) \text{ kpm} = (36,78 h^2) \text{ J}, \end{aligned}$$

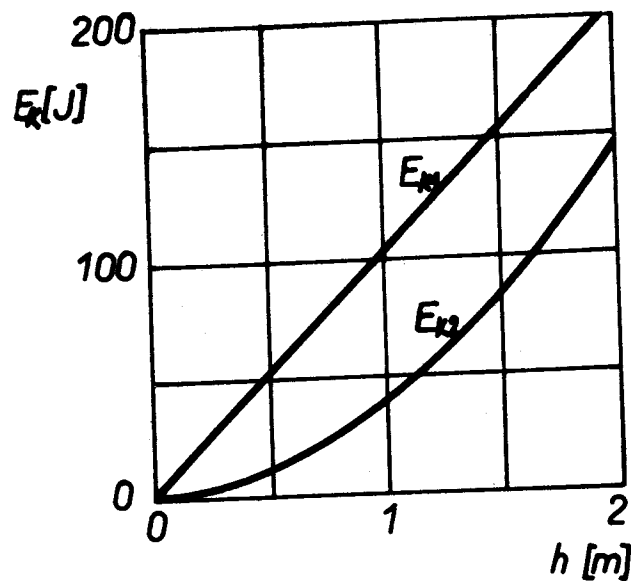
kde h je v metrech.

Na obrázku 3,1 je grafické znázornění závislosti kinetické energie závaží na výšce nad zemí h pro oba případy.

Práce se spotřebuje na zvýšení kinetické a potenciální energie závaží.

Potenciální energie E_p závaží vzroste při jeho vyzdvižení do výše $\ell = 2 \text{ m}$ obou případech o stejnou hodnotu $\Delta E_p = G\ell = 98,1 \text{ J}$.

2. Jaký je průměrný výkon čerpadla, které odčerpá $V = 40 \text{ l}$ vody z hranolové nádoby vířivé pračky do výše $v = 1 \text{ m}$ ode dna nádoby za dobu $t = 2 \text{ min}$. Délka stran čtvercového dna $a = 40 \text{ cm}$.



obr. 3,1

kde ρ je hustota vody a g tíhové zrychlení.

Celkovou práci A dostaneme integrací předchozího vztahu.

$$A = \int_{v-h}^v \rho g a^2 x dx = \rho a^2 g \left[\frac{x^2}{2} \right]_{v-h}^v =$$

$$= \rho a^2 g h (v - h/2) \approx 350 \text{ J.}$$

Po dosazení do vztahu pro průměrný výkon obdržíme výsledek

$$P = 350/120 \approx 3 \text{ W}$$

Průměrný užitečný výkon čerpadla je $\approx 3 \text{ W}$.

3. Vypočítejte jak velkou práci vykoná síla

$$\vec{F} = ? y^2 \vec{i} + 4x^2 \vec{j} - 6(x^2 + y^2) \vec{k} \text{ Newtonů}$$

při přemístění hmotného bodu hmoty $m = 0,2 \text{ kg}$ z místa C do místa D. C(-1, 0, 0) D(1, 0, 0) (souřadnice bodů jsou v metrech)

- podél osy x ,
- po kružnici v rovině x, z se středem v počátku,
- po kružnici v rovině x, y se středem v počátku.

Řešení:

Na hmotný bod působí proměnná síla $\vec{F}$. Práci A síly $\vec{F}$ po křivce z bodu C do bodu D určíme vyčíslením křivkového integrálu

$$A = \int_{CD} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{CD} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

kde $\vec{r}$ je polohový vektor bodů dráhy.

a) Při přemístění částice z bodu C do bodu D podél osy x jsou složky síly F_y, F_z stále kolmé ke směru dráhy. Práce těchto složek je nulová. Složka $F_x =$ a protože $y = 0$, je i $F_x = 0$. Práce síly $\vec{F}$ při přemístění hmotného bodu podél je rovna nule.

Řešení:

Výšku vody h v naplněné pračce vypočítáme ze zadaného objemu a plochy dna

$$h = V/a^2 = 0,25 \text{ m}$$

Průměrným výkonem P se nazývá práce A dělená časem t , po který byla konána.

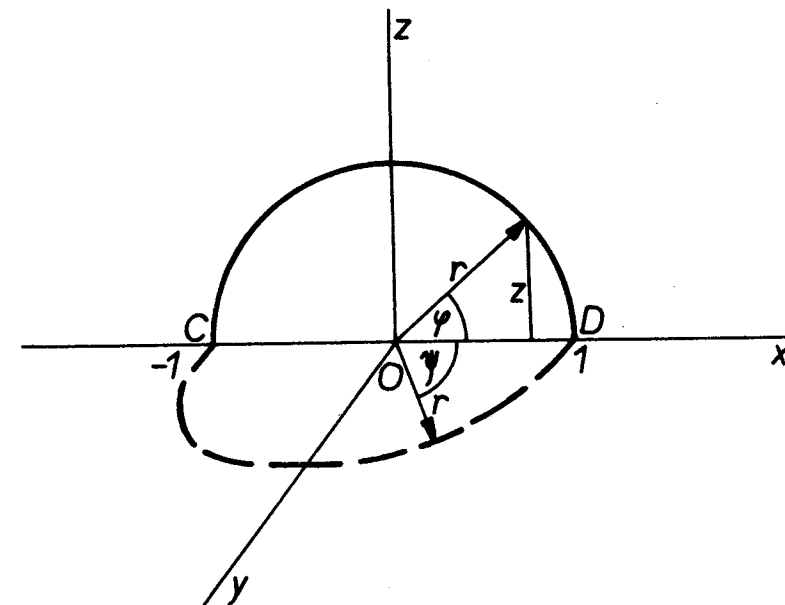
$$P = \frac{A}{t}$$

Nyní určíme práci A , která se vykoná při odčerpání vody z pračky do šle v. Práce dA vynaložená na odčerpání vody obsažené v elementární objemu $dV = a^2 dx$ ve výšce $(v-x)$ dna nádoby je dána vztahem

$$dA = \rho dV g \cdot x,$$

b) Při přemístování po dané kružnici v rovině x, z je $y = 0$ a tedy i $F_y = 0$. Složka F_y je kolmá ke směru dráhy, proto také práci nekoná. Práce síly $\vec{F}$ je v tomto případě rovna

$$A = \int_{CD} F_z dz.$$



obr. 3,2

Z obr. 3,2 je zřejmé, že $z = \sin \varphi$, $x = \cos \varphi$, $|\vec{r}| = 1 \text{ m}$. Pak $dz = \cos \varphi d\varphi$. Bodu C odpovídá úhel $\varphi = \pi$, bodu D úhel $\varphi = 0$.

Po dosazení

$$A = - \int_{\pi}^0 6 \cos^2 \varphi \cdot \cos \varphi d\varphi = -6 \int_{\pi}^0 (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi =$$

$$= -6 \left[\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right]_{\pi}^0 = 0$$

Práce síly $\vec{F}$ je po této dráze rovna nule.

c) Uskutečňuje-li se přemístění v rovině x, y je práce složky $F_z = 0$. Práce síly $\vec{F}$

$$A = \int_{CD} (F_x dx + F_y dy)$$

Ze znázornění na obr. 3,2 je vidět, že

$$x = \cos \psi, \quad y = \sin \psi.$$

$$\text{Pak } dx = -\sin \psi d\psi \quad \text{a } dy = \cos \psi d\psi.$$

Po dosazení

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\pi}^0 (-2 \sin^3 \psi \sin \psi + 4 \cos^2 \psi \cos \psi) d\psi = \\
&= -2 \int_{\pi}^0 \sin^3 \psi d\psi + 4 \int_{\pi}^0 \cos^3 \psi d\psi = -2 \int_{\pi}^0 \sin^2 \psi d\psi = \\
&= 2 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \psi) \sin \psi d\psi = 2 [-\cos \psi]_0^{\pi} + 2 \left[\frac{\cos^3 \psi}{3} \right]_0^{\pi} = \\
&= + (8/3) \text{ Joula.}
\end{aligned}$$

Řešením příkladu jsme zjistili, že práce vykonaná silou $\vec{F}$ závisí na zvolené dráze a síla $\vec{F}$ není tedy silou konzervativní.

4. Na hmotný bod hmoty $m = 0,1 \text{ kg}$ pohybující se rovnoměrně přímočaře rychlostí $\vec{v}_0 = (5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}) \text{ m/s}$ začala v čase $t_0 = 0$ působit po dobu 2s stálá síla $\vec{F} = (3\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ Newtonů}$. Určete hybnost hmotného bodu $\vec{H}$ v čase t_0 a hybnost v čase $t_1 = 2\text{s}$. Vypočítejte změnu kinetické energie ΔE_K za tyto 2 sekundy.

Řešení:

Změna hybnosti způsobená silou $\vec{F}$ za dobu $(t_1 - t_0)$ je rovna impulsu síly

Hybností tělesa $\vec{H}$ se nazývá součin z jeho hmoty m a rychlosti $\vec{v}$, impulsem $\vec{I}$ se označuje veličina $\vec{I} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt$.

Impuls stálé síly $\vec{I} = \vec{F} \cdot (t_1 - t_0) = \vec{H}_1 - \vec{H}_0$,

kde $\vec{H}_1 = m\vec{v}_1$ a $\vec{H}_0 = m\vec{v}_0$. ($\vec{H}_1$ je hybnost hmotného bodu v čase t_1 , $\vec{H}_0$ je jeho hybnost v čase t_0 .)

V našem případě

$$\vec{H}_0 = 0,1 (5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}) = (0,5\vec{i} + 0,4\vec{j} + 0,3\vec{k}) \text{ kg.m/s}$$

Hybnost $\vec{H}_1$ určíme z vektorové rovnice

$$\vec{F}(t_1 - t_0) + \vec{H}_0 = \vec{H}_1$$

Po dosazení a úpravě obdržíme výslednou hodnotu

$$\begin{aligned}
\vec{H}_1 &= (3\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot 2 + (0,5\vec{i} + 0,4\vec{j} + 0,3\vec{k}) = \\
&= (6,5\vec{i} + 4,4\vec{j} + 0,3\vec{k}) \text{ kg m/s}
\end{aligned}$$

Přírůstek kinetické energie $\Delta E_K = E_{K1} - E_{K0} = m(v_1^2 - v_0^2)/2$

kde E_{K1} je kinetická energie hmotného bodu v čase t_1 a E_{K0} je jeho kinetická energie v čase t_0 .

$$\begin{aligned}
\Delta E_K &= m[(\vec{H}_0/m)^2 - v_0^2]/2 = \\
&= m[(6,5^2 + 4,4^2 + 0,3^2) - (5^2 + 4^2 + 3^2)]/2 = 239 \text{ Joula.}
\end{aligned}$$

Kinetická energie daného hmotného bodu, působením síly $\vec{F}$, za 2 sekundy, vzroste o 239 Joula.

5. Sestrojte grafy časové závislosti kinetické energie tělesa vrženého s počáteční rychlostí $v_0 = 3 \text{ m/s}$ svisle dolů. Určete výšky h , ze kterých bylo těleso vrženo v těchto případech:

a) Zanedbejte odpor prostředí.

b) Prostředí klade tělesu odpor úměrný jeho rychlosti. Součinitel odporu:

ba) $k_a = 1 \text{ Ns/m}$

bb) $k_b = 10 \text{ Ns/m}$.

Těleso má hmotu $m = 1 \text{ kg}$ a na zem dopadlo za dobu $\tau = 2\text{s}$. Počítejte se zaokrouhlenou hodnotou tíhového zrychlení $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Řešení:

a) Těleso vržené svisle dolů počáteční rychlostí v_0 bude mít v čase t kinetickou energii

$$E_{Ka} = m(v_0 + gt)^2/2 = mv_0^2/2 + mgv_0t + mg^2t^2/2$$

výše h nad zemí, ze které bylo těleso vrženo, je dána vztahem

$$h = v_0\tau + g\tau^2/2 = 26 \text{ m,}$$

kde τ je doba pádu tělesa.

b) Pohybová rovnice tělesa hmoty m , na které působí váha tělesa a odpor prostředí $F = k \frac{dx}{dt}$, je

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k \frac{dx}{dt}.$$

Nalezneme řešení této rovnice pro $v = \frac{dx}{dt}$.

Pohybovou rovnici přepíšeme do tvaru

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v - g = 0$$

a substituujeme $v - mg/k = u$.

Pak

$$\frac{du}{dt} + \frac{k}{m}u = 0.$$

Řešením vzhledem k u dostáváme

$$\frac{du}{u} = -\frac{k}{m} dt$$

$$\ln \frac{u}{u_0} = -k(t - t_0)/m$$

$$u = u_0 e^{-k(t-t_0)/m}$$

a zpětnou substitucí

$$v = (mg/k) + (v_0 - mg/k) e^{-k(t-t_0)/m}$$

V čase $t = 0$ je $v = v_0$ a proto $t_0 = 0$. Po dosazení v do výrazu pro kinetickou energii $E_K = mv^2/2$ dostaneme

$$E_K = (m/2) [(mg/k) + (v_0 - mg/k) e^{-kt/m}]^2.$$

Dráhu h , kterou urazí těleso za dobu τ , určíme integrací výrazu pro rychlost v

$$h = (mg\tau/k) - (m/k)(v_0 - mg/k) e^{-k\tau/m} + C$$

V čase $t = 0$ je dráha $h = 0$, to znamená, že $C = (mv_0/k) - (m^2g/k^2)$. Pro $k_a = 1 \text{ Ns/m}$ je $h_a \approx 13,9 \text{ m}$, pro $k_b = 10 \text{ Ns/m}$ je $h_b \approx 2,2 \text{ m}$.

V tabulkách a, ba, bb jsou uvedeny hodnoty kinetické energie pro některé hodnoty t (0, 2s) vypočtené dosazením našich numerických údajů do odvozených výrazů pro E_K .

a) bez odporu prostředí

t(s)	0	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2
$E_K(J)$	4,5	8	12,5	32	84,5	162	264,5

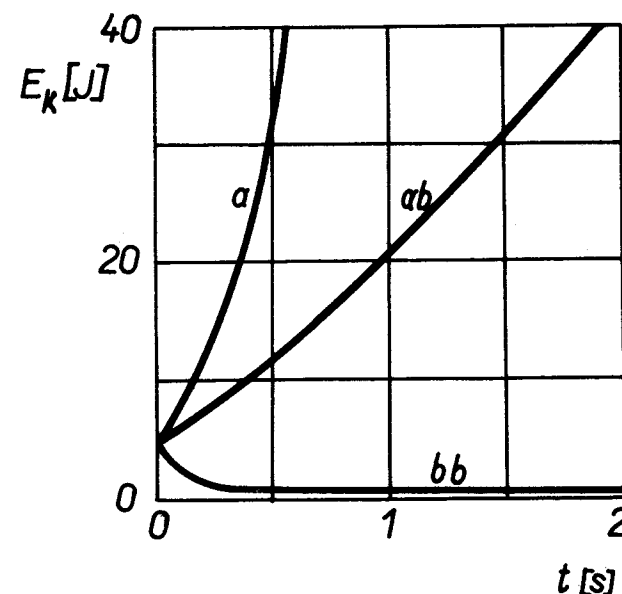
ba) pro koeficient odporu $k_a = 1 \text{ Ns/m}$

t(s)	0	0,01	0,1	0,2	0,5	1	1,5	
$E_K(J)$	4,5	4,8	6,8	10,5	11,5	28	36	4

bb) pro $k_b = 10 \text{ Ns/m}$

t(s)	0	0,001	0,002	0,005	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$E_K(J)$	4,5	4,44	4,38	4,25	3,92	2,42	1,48	0,75	0,60	0,504	0,50

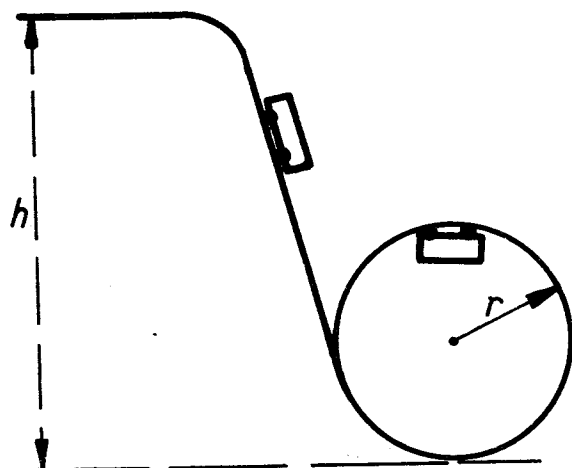
Grafické znázornění těchto závislostí je na obr. 3,3.



obr. 3,3

Úlohy

- Vypočítejte práci A vynaloženou na stlačení pružiny o délku $\ell = 5 \text{ cm}$. Stlačení je přímo úměrné působící síle. Ke stlačení o 1 cm je zapotřebí síly 90 Newtonů .
- Odhadněte práci A vynaloženou namočiníky za bezvětří na svinutí čtvercové plachty o straně $a = 8 \text{ m}$ upevněné na vodorovném ráhnu. Plachta má hmotu $m = 60 \text{ kg}$.
- Automobil váží $G = 10^3 \text{ kp}$. Maximální výkon jeho motoru $P = 120 \text{ hp}$. Tohoto výkonu dosáhne při rychlosti $v = 60 \text{ km/hod}$. Vypočítejte zrychlení automobilu při této rychlosti za předpokladu, že 30% výkonu motoru P se spotřebuje na překonání tření.
- Při výstřelu vyletí z pušky střela hmoty $m = 10 \text{ g}$ rychlostí $v_0 = 900 \text{ m/s}$. Doba výstřelu $t = 15 \cdot 10^{-3} \text{ s}$, vykonaná práce $A = 150 \text{ kpm}$. Určete kinetickou energii střely E_K , celkový $\bar{P}$ a užitečný $\bar{P}_e$ střední výkon výstřelu.
- Spalovací motor dodává na remenici dynamu poloměru $r = 10 \text{ cm}$ při frekvenci otáček $f = 50 \text{ otáček/s}$ výkon $P = 220 \text{ W}$. Určete namáhání remene T , zanecháte-li skluz na remenici.
- Jakou práci A musí vykonat rumpál na lodi, vyzdvihující z vody plovoucí válcovou homogenní bóji, ze $4/5$ výšky v ponořenou do vody. Rozměry bóje: průměr $2r = 1 \text{ m}$, výška $v = 2 \text{ m}$.
- Sánky jedoucí se zasněženého kopce se klonem $\alpha = 15^\circ$ se po zdolání výškového rozdílu $h = 15 \text{ m}$ zastaví, na stejně zasněžené rovině, ve vzdalenosti $\ell = 100 \text{ m}$ od úpatí kopce. Vypočítejte koeficient tření f sánek na sněhu.
- Kámen padá z výšky h dobu $t = 1,43 \text{ s}$. Zanedbejte odpor prostředí a určete kinetickou (E_K) a potenciální (E_P) energii kamene uprostřed jeho dráhy, víte-li, že jeho váha $G = 20 \text{ Newtonů}$.
- Jak by se změnily jednotky mechanických veličin, kdyby se místo základních jednotek soustavy SI vzaly jednotky n krát větší.
- Družice Země, hmoty $m = 1 \text{ kg}$, se ve výši nad Zemí $h = 30 \text{ km}$ dostává do hustých vrstev atmosféry. Určete práci A , kterou by vykonaly brzdící síly za předpokladu, že by družice při dopadu na Zem měla nulovou rychlost.
- Na automobil hmoty $m = 10^3 \text{ kg}$ působí za jízdy konstantní síla tření F_T rovná desetina jeho váhy. Kolik automobil spotřebuje hmoty m_1 benzínu na rovinném úseku cesty délky $\ell = 500 \text{ m}$, kde jeho rychlost vzroste z $v_1 = 10 \text{ km/hod}$ na rychlost $v_2 = 40 \text{ km/hod}$? Účinnost motoru včetně převodového ústrojí $\eta = 20\%$, odpor vzduchu je zanedbatelný a energetická účinnost benzínu $\xi = 4,6 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$.
- Porovnejte práci, vykonanou sportovci ve 3 lehkostatických disciplínách: a) ve vrhu koulí ($m_k = 7,257 \text{ kg}$, $\ell_k = 19,40 \text{ m}$), b) v hodů diskem ($m_d = 1,99 \text{ kg}$; $\ell_d = 63,20 \text{ m}$), c) v hodů oštěpem ($m_o = 0,806 \text{ kg}$; $\ell_o = 20,05 \text{ m}$) za předpokladu, že příslušná nářadí byla vrhána pod úhlem $\alpha = 45^\circ$ z výšky $h = 1,8 \text{ m}$ nad zemí. Odpor prostředí zanedbejte (m jsou hmoty nářadí a ℓ délky vrhů).



obr. 3,4

13. Malý vozík hmoty m sjíždí bez tření po dráze (viz obr. 3,4) zakončené kruhovou smyčkou poloměru r . S výšky h musí vozík sjíždět, aby jel celou kruhovou smyčkou?

14. Automobil, vážící $G = 10^3$ kp přpnutém motoru sjíždí s kopce konstantní rychlostí $v = 54$ km/hod. Sklon kopce je takový, že na 100 m dráhy klesá výška průměrně o 4 m. Vypočítejte, jaký výkon P by musel vyvinout motor, aby se automobil i do kopce pohyboval stejnou rychlostí.

15. V prostoru, ve kterém se pohybuje

hmotný bod $m = 1$ kg, působí síla $\vec{F} = 3y^2\vec{i} + 4x^2\vec{j} - 6(x^2 + z^2)\vec{k}$ Newtonů. Se $t = 0$ je poloha hmotného bodu udána polohovým vektorem $\vec{r}_0 = (3\vec{i} - 2\vec{j})$ m a rychlost hmotného bodu v čase $t = 0$ $\vec{v}_0 = (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})$ m/s.

Určete pro $t = 0$

- sílu $\vec{F}_0$, která působí na hmotný bod,
- zrychlení $\vec{a}_0$ hmotného bodu,
- kinetickou energii E_{K0} hmotného bodu,
- rychlost změny kinetické energie.

16. Určete přibližné hodnoty $\vec{r}$, $\vec{v}$ a E_K částice z předešlé 15. úlohy v čase $t = 10^{-2}$ s.

17. Aby těleso mohlo opustit gravitační pole Země, musí mu být udělena rychlost $v_1 \approx 11$ km/s (2. kosmická rychlost). Kosmická loď po vypotřebování všeho paliva má při výletu ze zemské atmosféry rychlost $v_0 = 12$ km/s. Jakou rychlost bude mít tato loď ve vzdálenosti $r = 10^6$ km od Země, nebude-li na ni působit jiné nebeské těleso?

18. Vypočítejte práci A , kterou je nutné vykonat, aby těleso hmoty $m = 1$ kg na vodorovné přímočaré dráze délky $s = 10$ m zvětšilo svoji rychlost z hodnoty $v_1 = 1$ m/s na hodnotu $v_2 = 10$ m/s. Na těleso působí síla tření $F_T = 1$ N.

19. Vypočítejte potenciální energii E_p hmotného bodu, na který působí síla $\vec{F} = -k\vec{x}^3$.

20. Hmotný bod hmoty $m = 2,4$ kg se může bez tření pohybovat podél osy z . Hmotný bod byl v klidu v bodě $z = 0$. Působením síly $F = (2 + 6z)$ Newtonů (z je v m) byl uveden do pohybu. Určete a) rychlost v , b) zrychlení a , c) výkon P když hmotný bod urazil dráhu 6 m.

21. Hmotný bod hmoty $m = 2$ kg se může pohybovat bez tření podél osy y . Hmotný bod byl v klidu v bodě $y = 0$ a v čase $t = 0$ začne působit po dobu $t = 6$ s síla $F = (2 + 6t)$ Newtonů (t je v sekundách). Určete: a) rychlost v , b) zrychlení a , c) výkon P této síly pro $t = 6$ s.

22. Ohebný homogenní kabel hmoty m a délky l je přehozen přes vodorovně upevněnou tyč. Tření mezi kabelem a tyčí je zanedbatelné. Po malém vychýlení jednoho z konců kabelu z rovnovážné polohy je uveden kabel do pohybu. Určete rychlost kabelu v okamžiku, kdy bude přes tyč procházet jeho konec.

23. Svisle zavěšené homogenní vlákno hmoty m , jehož konec se dotýká rovinné desky, bylo na horním konci uvolněno. Stanovte sílu F , která působí na desku stolu po dobu pádu vlákna.

24. Určete hybnost $\vec{H}$ kopacího míče hmoty $m = 425$ g ve výši $h = 5$ m nad zemí, byl-li míč vykopnut pod úhlem $\alpha = 45^\circ$ s počáteční rychlostí $v_0 = 72$ km/hod. Odpor vzduchu zanedbejte.

25. Sestrojte graf závislosti kinetické, potenciální a celkové energie tělesa vrženého z výšky $H = 20$ m vodorovně počáteční rychlostí $v_0 = 10$ m/s na výšce tělesa nad zemí. Odpor prostředí zanedbejte. Těleso má hmotu $m = 2$ kg.

4. Harmonický pohyb

Řešené příklady

1. Vypočítejte amplitudu a fázovou konstantu netlumeného harmonického pohybu po přímce, je-li doba kmitu $T = 3,15$ s a v čase $t = 0$ byla okamžitá výchylka $x_0 = 10$ cm a rychlost $v_0 = 0,4$ m/s.

Řešení:

Okamžitá výchylka $x = A \cos(\omega t + \alpha)$. A se nazývá amplitudou kmitu, ωt je fáze a α je fázovou konstantou.

Okamžitá rychlost harmonického pohybu

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha).$$

Zavedeme do výrazů pro x a v naše počáteční podmínky

$$\begin{aligned} v_0 &= -A\omega \sin \alpha \\ x_0 &= A \cos \alpha \end{aligned}$$

Z těchto 2 rovnic po dosazení $\omega = 2\pi/T$ vypočítáme amplitudu A a fázovou konstantu α .

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0 T}{2\pi}\right)^2 + x_0^2} \approx 0,323 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0 T}{2\pi x_0} \approx -2$$

$$\alpha \approx -63^\circ 30'$$

2. Nezátížená pružina má délku l . Když se na ní zavěsí závaží hmoty m , je ustálení její délka $l + h$. Na závaží, které je v klidu, dopadne z výše n druhého závaží stejné hmoty a zůstane na něm. Určete dobu kmitu T a amplitudu kmitu A tohoto systému. Hmotu pružiny zanedbejte.

Řešení:

Nejprve určíme tuhost pružiny k :

$$\begin{aligned} mg &= k \cdot h \\ k &= mg/h \end{aligned}$$

Závaží padající z výše h má při dopadu rychlost

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Po dopadu závaží se celý systém dá do pohybu rychlostí v_s , kterou určíme ze zákona zachování hybnosti

$$v \cdot m = v_s(m + m) = 2v_s \cdot m$$

$$v_s = \frac{v}{2} = \sqrt{2gh/2}$$

Maximální výchylka a se vypočítá z věty o kinetické energii. Práce vnějších sil po dané dráze se rovná přírůstku kinetické energie

$$-\frac{1}{2}(m+m)v_s^2 = -\int_a^0 kx dx + (m+m)g(a-h)$$

$$-mv_s^2 = -\frac{k}{2}(a^2 - h^2) + 2mg(a-h)$$

po dosazení v_s a k dostaneme

$$a^2 - 4ha + 2h^2 = 0$$

$$a_{1,2} = 2h \pm \sqrt{2}h$$

pružina při zatížení 2 závažími bude mít rovnovážnou polohu ve vzdálenosti b , kterou určíme ze vztahu

$$2mg = kb$$

$$b = 2h$$

Systém bude kmitat kolem této rovnovážné polohy. Amplituda kmitů $A = a - b = \sqrt{2}h$. Kruhová frekvence kmitů $\omega = \sqrt{k/2m} = \sqrt{g/2h}$, proto perioda $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{2h/g}$.

3. Nalezněte přesný výraz pro superpozici $\psi(t)$ N rovnoběžných harmonických kmitů

$$\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t) + \dots + \psi_N(t)$$

kde

$$\psi_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1)$$

$$\psi_2(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1 + \varphi)$$

$$\psi_3(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1 + 2\varphi)$$

$$\vdots$$

$$\psi_N(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1 + (N-1)\varphi)$$

Řešení:

V tomto případě jde o skládání kmitů se stejnou amplitudou A_1 a kruhovou frekvencí ω . Za sebou jdoucí kmitů se liší ve fázi o konstantní fázový rozdíl φ . Bude výhodné použít vyjádření harmonického kmitu komplexním číslem. S použitím Eulerova vzorce

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

můžeme každý z našich uvažovaných kmitů brát jako reálnou část komplexního čísla. Pro k -tý kmit ($1 \leq k \leq N$) lze psát

$$\psi_k(t) = \operatorname{Re} \left\{ A_1 e^{i(\omega t + \delta_1)} e^{i(k-1)\varphi} \right\}$$

lyní si zavedem

$$\xi_k(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1 + (k-1)\varphi) + iA_1 \sin(\omega t + \delta_1 + (k-1)\varphi)$$

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N \xi_k(t) = A_1 e^{i(\omega t + \delta_1)} \left[1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{i(N-1)\varphi} \right]$$

Výraz v hranaté závorce je geometrická řada. Provedeme-li její součet, je

$$\xi(t) = A_1 e^{i(\omega t + \delta_1)} \left[\frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} \right]$$

$$\xi(t) = A_1 e^{i(\omega t + \delta_1)} \left[\frac{e^{iN\varphi/2} - e^{-iN\varphi/2}}{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}} \right] =$$

$$= A_1 e^{i(\omega t + \delta_1)} \frac{e^{iN\varphi/2} - e^{-iN\varphi/2}}{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}}$$

Vzhledem k tomu, že $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz}) / 2i$, je

$$\xi(t) = A_1 \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} e^{i[\omega t + \delta_1 + (N-1)\varphi/2]}$$

Vezmeme-li reálnou část tohoto výrazu, dostaneme vztah pro $\psi(t) = \sum_{k=1}^N \psi_k(t)$

$$\psi(t) = A_1 \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \cos[\omega t + \delta_1 + (N-1)\varphi/2] = A \cos(\omega t + \delta),$$

kde $A = A_1 \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$ a δ je aritmetický průměr z δ_1 a $\delta_N = \delta_1 + (N-1)\varphi$

4. Zaveďte do obecného výrazu pro tlumený kmit, který má tvar $s = S e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$, tyto počáteční podmínky: pro $t = 0$ je $s = s_0$ a $v = 0$.

Řešení:

Okamžitá rychlost $v = \dot{s} = S e^{-\delta t} [-\delta \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)]$.
Do výrazů pro s a v zavedeme naše počáteční podmínky a dostaneme

$$s_0 = S \sin \varphi$$

$$0 = -\delta S \sin \varphi + \omega S \cos \varphi$$

Řešíme tuto soustavu rovnic, pak

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\delta}; \quad \sin \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0},$$

kde ω_0 je vlastní kruhová frekvence příslušející kmitům bez tlumení a $S =$

$$= \frac{\omega_0}{\omega} s_0.$$

Po zavedení našich počátečních podmínek bude mít výraz pro tlumený kmit tvar

$$s = \frac{\omega_0}{\omega} s_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi).$$

Úlohy

v rtuťovém U manometru je 121 g rtuti. Plocha vnitřního průřezu U trubice je $s = 0,3 \text{ cm}^2$. Je-li rtuť poněkud vychýlena z rovnovážného stavu, začnou hladiny kapaliny v obou ramenech vykonávat harmonický pohyb. Vypočítejte dobu kmitu T tohoto pohybu. Kapilární síly a tření zanedbejte.

předpokládejte, že pohyb pístu ve spalovacím motoru je harmonický. Vypočítejte silové působení pístu na lomenou hřídel v mrtvém bodě. Hmoty pístu $m = 1,2 \text{ kg}$, lomená hřídel se otáčí s frekvencí $f = 200 \text{ ot/min}$ a zdvih pístu $a = 12 \text{ cm}$.

Hustoměru s válcovou trubicou průměru d , plovoucím v kapalině hustoty ρ byl udělen malý svislý impuls. Určete dobu kmitu T hustoměru hmoty m . Pohyb kapaliny a tření zanedbejte.

Dvě částice vykonávají harmonický pohyb po téže přímce se stejnou amplitudou $a = 10 \text{ cm}$. Kruhové frekvence těchto kmitů jsou $\omega_1 = 20 \text{ s}^{-1}$, $\omega_2 = 21 \text{ s}^{-1}$. V čase $t = 0$ obě částice procházejí bodem $x = 0$ ve směru kladné osy x . (Jsou ve fázi.) Určete, v jaké vzdálenosti se budou nacházet částice v čase $t = 0,35 \text{ s}$ a jaká bude v tomto okamžiku jejich vzájemná rychlost.

Představte si, že podél celého průměru Země vede šachta. Jak se bude touto šachtou pohybovat těleso vržené do ní nulovou počáteční rychlostí. Určete dobu t , za kterou by se dostalo těleso s povrchu Země do jejího středu. Zemi považujte za homogenní kouli poloměru $R = 6370 \text{ km}$. Na těleso pohybující se uvnitř koule působí síla mířící vždy do středu koule o velikosti přímo úměrné vzdálenosti tělesa od středu koule.

Svislá pružná spirála tuhosti $k = 50 \text{ N/m}$ je na jednom konci upevněna. Ke druhému konci je připevněna nit, na níž visí závaží hmoty $m = 0,1 \text{ kg}$. Jakou největší počáteční výchylku a , směrem dolů, můžeme udělit závaží, aby při takto vzniklých kmitech byla nit stále napjatá.

Jaký pohyb vznikne superpozicí dvou rovnoběžných harmonických kmitů se stejnými kruhovými frekvencemi ω ; amplitudy jsou $a_1 = 1 \text{ cm}$, $a_2 = 10 \text{ cm}$ a fázové konstanty $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$.

Jaký výsledný pohyb vznikne složením dvou harmonických kmitů stejného směru? Amplitudy kmitů jsou $a_1 = a_2 = 2 \text{ mm}$, kruhové frekvence $\omega_1 = 99 \text{ s}^{-1}$, $\omega_2 = 100 \text{ s}^{-1}$.

Proveďte superpozici dvou harmonických kmitů konaných po přímkách vzájemně kolmých. Doby kmitu a amplitudy jsou u obou kmitů stejné; $T_1 = T_2 = 0,1 \text{ s}$, $a_1 = a_2 = 2 \text{ cm}$. α_1 a α_2 jsou fázové konstanty. Uvažujte případy:

a) obecné hodnoty α_1, α_2

b) $\alpha_1 = \alpha_2$

c) $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$

10. Na desce leží závaží hmoty $m = 5 \text{ g}$. Systém koná harmonické kmity ve svislé směru s periodou $T = (\pi/3) \text{ s}$.
 a) Určete sílu F , kterou tlačí závaží na desku.
 b) Jakou amplitudu a musí mít kmity desky, aby závaží začalo odskakovat od desky?
11. Na pružině tuhosti k je zavěšeno závaží váhy G . Závaží je podepřeno tak, že pružina není deformována. Jaký pohyb bude vykonávat závaží po odstranění podpory (bez nárazu na závaží)? Hmotu pružiny a odpor prostředí zanedbejte.
12. Jaký je logaritmický dekrement útlumu λ mosazné kuličky hmoty $m = 0,15 \text{ kg}$, která křívá na vlákně délky $\ell = 1 \text{ m}$, je-li počáteční amplituda kmitů A_0 a za čas $t = 10 \text{ min}$. je amplituda $A = 0,5^0$?
13. Těleso hmoty $m = 200 \text{ g}$ koná vynucené harmonické kmity. Amplituda vynucené síly $F_0 = 2 \text{ N}$. Doba vlastních kmitů tělesa $T_0 = (\pi/4) \text{ s}$ a koeficient útlumu $b = 4 \text{ s}^{-1}$. Určete amplitudu kmitu při rezonanci a_R a rezonanční kruhovou frekvenci ω_R .
14. Dvě stejná fyzická kyvadla křívají v téže svislé rovině. Vlastní doby kmitu kyvadel jsou $\omega_1 = 2\pi \text{ s}^{-1}$, $\omega_2 = 2,1\pi \text{ s}^{-1}$. Určete stupeň vazby α .

5. V š e o b e c n ý g r a v i t a č n í z á k o n

Řešené příklady

1. Vypočítejte přímou integrací potenciál U gravitačního pole, vytvořeného homogenní plnou koulí K o objemové hustotě ρ a poloměru R , v bodě A , vzdáleném r_{SA} od středu koule S .

Řešení:

Gravitační potenciál U v bodě A o radiusvektoru $\vec{r}_A$ vzbuzený spojitě rozloženou hmotou, se získá provedením integrace ve vztahu (α je gravitační konstanta)

$$U = -\alpha \int_V \frac{\rho dV}{|\vec{r} - \vec{r}_A|}$$

přes celý objem V , kde je nenulová hustota ρ . Střed sférické souřadné soustavy umístíme do středu koule S , polární osu $\vartheta = 0$ do přímky AS . Po vytknutí (konstantní) hustoty zbývá integrál přes kouli K , který počítáme ve sférických souřadnicích r, φ, ϑ :

$$\int_V \frac{dV}{|\vec{r} - \vec{r}_A|} = \int_{r=0}^R \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr}{\sqrt{r_{SA}^2 + r^2 - 2rr_{SA} \cos \vartheta}} = \frac{2\pi r}{r_{SA}} \int_{r=0}^R (r_{SA} + r - |r_{SA} - r|) dr$$

Poslední integrál dává

$$\begin{aligned} \text{pro } r_{SA} \geq R \quad U &= -\alpha \rho \frac{4\pi R^3}{3r_{SA}} \\ \text{pro } r_{SA} < R \quad U &= -\alpha \rho \left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_{SA}^2 \right) \end{aligned}$$

Vně koule je tedy stejné pole, jaké by vyvolal hmotný bod se stejnou hmotou jako koule ($\frac{4\pi}{3}\rho R^3$) umístěný v bodě S . Načrtněte průběh funkce $U = f(r_{SA})$. Užitím Gaussovy věty, známé z elektrostatiky, lze výsledek odvodit pohodlněji.

(Čtenář se možná pozastaví nad tím, že vzhledem k chování funkce $\frac{1}{r}$ v okolí bodu $r = 0$ nelze pro $r_{SA} < R$ integrál $\int_V \frac{dV}{r}$ definovat běžným Riemannovským způsobem na základě rozdělení integračního oboru, sečtení příspěvků a limitního přechodu pro rostoucí jemnost rozdělení. Lze pouze bez důkazu uvést, že existují způsoby, jak rozšířit pojem integrálu na podstatně širší třídu funkcí, takže náš integrál je pak definován a získaný výsledek přitom zůstává v platnosti.)

2. Kdyby sluneční gravitační pole v blízkosti Země bylo homogenní, byly by všechny předměty v okolí Země urychlovány stejným směrem s tímž zrychlením jako Země a vliv sluneční přitažlivosti by se na Zemi neprojevil. Ježto však předpoklad přesně neplatí, vyvolává sluneční přitažlivost na Zemi pozorovatelné efekty.

Vypočítejte, s jakým (Sluncem způsobeným) zrychlením se pohybují tělesa v souřadné soustavě Σ , jejíž střed je pevně spojen se zemským středem. Osy souřadné soustavy zachovávají stálý směr vůči některé inerciální soustavě (soustava Σ nerotuje spolu se Zemí).

Řešení:

Označme $\vec{r}_{zs}$ vektor, spojující zemský střed Z se slunečním S a $\vec{r}$ vektor spojující vyšetřovaný bod X se zemským středem Z; pak $\vec{r}_{xs} = \vec{r} + \vec{r}_{zs}$ spojuje sluneční střed S s bodem X.

Síla působící v slunečním gravitačním poli na hmotný bod hmoty m v místě je rovna

$$- \alpha m M_s \frac{\vec{r}_{xs}}{r_{xs}^3} = m (\vec{a} + \vec{a}_{\Sigma}),$$

kde $\vec{a}_{\Sigma}$ je zrychlení hmotného bodu v souřadné soustavě Σ , M_s hmota Slunce a $\vec{a}$ zrychlení soustavy Σ vůči soustavě inerciální (vzájemný pohyb obou soustav je translační). Zrychlení $\vec{a}$ je dáno zrychlením Země v gravitačním poli Slunce, které dle výsledku úlohy 7. rovná intenzitě slunečního gravitačního pole v bodě Z

$$\vec{a} = - \alpha M_s \frac{\vec{r}_{zs}}{r_{zs}^3}.$$

Je tedy

$$\vec{a}_{\Sigma} = - \alpha M_s \left(\frac{\vec{r}_{xs}}{r_{xs}^3} - \frac{\vec{r}_{zs}}{r_{zs}^3} \right)$$

pro rozpis tohoto vektorového vztahu ve složkách lze vhodně zvolit osy souřadné soustavy Σ tak, že osa x má (pouze v uvažovaném okamžiku!) směr spojnice ZS. $\vec{r}_{zs} = (r_{zs}, 0, 0)$; složky r označíme x, y, z . Pak např. x -ová složka rozdílu v závorkách v (1)

$$- \alpha^{-1} M^{-1} (\vec{a}_{\Sigma})_x = \frac{r_{zs} + x}{[(r_{zs} + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{r_{zs}}{r_{zs}^3} = f(x, y, z) - f(0, 0, 0),$$

kde f je funkce tří proměnných, daná prvním zlomkem v (2). Předpokládáme nyní $|\vec{r}| \ll r_{zs}$; pak se lze při výpočtu f omezit na první členy Maclaurinova rozvoje:

$$f(x, y, z) = f(0, 0, 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\vec{r}=0} \cdot x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\vec{r}=0} \cdot y + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\vec{r}=0} \cdot z$$

Tak dostáváme pro x -ovou složku zrychlení hodnotu $\alpha M_s \cdot 2x/r_{zs}^3$. Podobně lze vyčíslit druhé dvě složky; vektor $\vec{a}_{\Sigma}$ je

$$\vec{a}_{\Sigma} = \frac{\alpha M_s}{r_{zs}^3} (2x, -y, -z)$$

Načrtněte tento vektor v různých bodech v rovině xz !

Poznámka: Ke zrychlení $\vec{a}_{\Sigma}$ lze přiřadit sílu $\vec{F}_{\Sigma} = m \vec{a}_{\Sigma}$; úplně analogicky lze odvodit sílu vyvolanou přitažlivostí Měsíce. Tyto síly, zvané slapové, vyvolávají např. mořský příliv a odliv.

Úlohy

v tomto oddíle považujte, pokud není jinak uvedeno, tvar nebeských těles za kulový. Poloměr Země $R_z = 6370$ km, hmota Země $M_z = 5,985 \cdot 10^{24}$ kg = $\alpha^{-1} \cdot 3,992 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$, kde $\alpha = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ je gravitační konstanta. Střední vzdálenosti dvou těles nazýváme aritmetický průměr maximální a minimální vzdálenosti a tedy i (lze-li zanedbat vliv ostatních těles) hlavní poloosu Keplerovy elipsy, kterou opisuje jedno vůči druhému.

1. Vypočítejte minimální rychlost, kterou je třeba udělit tělesu hmoty m na povrchu Země, aby

1. se dostalo na kruhovou oběžnou dráhu kolem Země (I. kosmická rychlost v_I),

2. opustilo oblast zemské přitažlivosti (II. kosmická rychlost v_{II}).

Neuvažuje se odpor vzduchu a rychlost tělesa, způsobená rotací Země.

2. Za těchto podmínek jako v příkladě 1) vypočítejte minimální rychlost v_{III} , potřebnou pro opuštění sluneční soustavy (III. kosmická rychlost). Zemskou dráhu kolem Slunce uvažujte jako kruhovou s poloměrem $r_{zs} = 150 \cdot 10^6$ km.

Návod: Celková energie tělesa v gravitačním poli Slunce musí po opuštění oblasti zemské přitažlivosti být nezáporná.

3. V jaké výši nad Zemí se musí pohybovat stacionární družice (tj. taková, která "stojí" stále nad stejným bodem zemského povrchu)?

4. Perigeum družice má výšku 300 km, apogeuum 1200 km. Vypočítejte dobu oběhu T !

5. Měsíc Marsu Fobos má střední vzdálenost od Marsu $S_{MF} = 9380$ km, oběžná doba (hvězdná) je $T_F = 0,319$ dne, jeho hmotu lze vzhledem k hmotě Marsu M_M zanedbat. Odhadněte gravitační zrychlení na Marsu, je-li střední poloměr Marsu R asi 3380 km. (Zanedbejte vliv zploštění, vliv vlastní rotace Marsu a vliv sluneční přitažlivosti).

6. Meziplanetární kosmická sonda (hmoty m) se blíží k Marsu relativní rychlostí $v_0 = 3$ km/sec a se záměrnou vzdáleností $a = 10^4$ km (tj. trajektorie sondy vzhledem k planetě má přímkovou asymptotu, jejíž vzdálenost od středu planety je a). Stanovte:

- minimální vzdálenost r_m , na kterou se sonda k planetě přiblíží,
- odchylku φ směru, kterým sonda opouští oblast přitažlivosti Marsu, od původního směru.

Použijte údaje z úlohy č. 5.

Jistá omezená oblast prostoru je vyplněna hmotnými tělesy; vně této oblasti je umístěna homogenní hmotná koule o středu S. Ukažte, že na kouli působí stejná síla, jaká by působila na hmotný bod o stejné hmotě, jako má koule, umístěný v bodě S. (Lze použít výsledku řešeného příkladu 1.)

8. Přímo integrací vypočtete intenzitu gravitačního pole rovinné tlusté homogenní desky. Poznámka: Je vhodné použít válcových souřadnic, počátek volíme ve vyšetřovaném bodě, osu z kolmo k vrstvě. Ze symetrie konfigurace kolem osy z plyne, že jediná nenulová složka intenzity $\vec{E}$ je ve směru z. Lze počítat též potenciál integrací?

9. Rovnoramenné váhy, umístěné nad silnou vodorovnou olověnou zdí tloušťky $h = 2$ m, jsou vybaveny ještě dalším párem misek. Tyto misky jsou umístěny zdi a spojeny s horními miskami dráty, procházejícími otvory ve zdi. Vlevo skleněná koule naplněná rtutí hmoty $m = 1$ kg umístěna na misce pod zdí, vpravo stejná koule nad zdí. Na zbývajících miskách jsou prázdné skleněné koule kvůli kompenzaci vztlačením vzduchu. Vyměníme-li místa obou koulí vlevo a provedeme-li totéž i napravo, vychýlí se vahadlo o stejný úhel jako při vážení $\Delta m = 3,75$ mg. Jaká z toho plyne hodnota α ? Hustota olova je $11,3 \text{ g cm}^{-3}$. Zeď pokládejte za nekonečnou ve směru kolmém na závěsy misek, zanedbejte v otvoru; zemské gravitační pole pokládejte za homogenní. (Užijte výsledek úlohy 8.)

Poznámka. Podobná měření byla skutečně též užita ke stanovení gravitační konstanty. Na rozdíl od našich zjednodušení však má značný vliv nehomogenita zemského gravitačního pole ve svislém směru (gravitační zrychlení klesá s výškou). Tento vliv lze stanovit opakováním pokusu při odstranění olověné zdi výpočtem jej lze pak vyloučit.

10. V Cavendishově pokusu ke stanovení gravitační konstanty α jsou olověné kuličky K_1, K_2 (se středy S_1, S_2 se stejným poloměrem $r = 2,5$ cm a hmotou $m = 0,74$ kg) připevněny ke koncům nosníku, zavěšeného uprostřed na torzním závěsu. Zkroucení torzního vlákna o úhel 1 rad vyžaduje silový moment $k \cdot 1 \text{ rad} = 0,92 \cdot 10^{-6} \text{ N.m}$. Umístí-li se proti nim koule K'_1, K'_2 se středy S'_1, S'_2 , každé hmoty $M = 160$ kg, zkroucí se závěsné vlákno o úhel $\varphi = 0,084$ rad. Předpokládejte, že (po zkroucení závěsu) jsou přímky $S'_1 S_1$ a $S'_2 S_2$ kolmé k přímce $S_1 S_2$ přičemž $\overline{S_1 S_2} = 2a = 42$ cm, $\overline{S_1 S'_1} = \overline{S_2 S'_2} = d = 20$ cm. Vypočtete hodnotu α plynoucí z tohoto měření. Hmotu nosníku v porovnání s hmotami kulíček K_1 zanedbejte.

11. Vektor $\vec{a}_\Sigma$ v rovnici (3) z řešeného příkladu lze pokládat za intenzitu jistě silového pole. Má toto pole potenciál? Má-li, jaký?

12. V našem přiblížení představuje kulový zemský povrch současně ekvipotenciální plochu zemského gravitačního pole. Uvažujeme-li ještě slapové síly např. od Slunce, tvar této ekvipotenciály se změní: někde dojde k malému zvýšení, někde k snížení vzhledem k původní kulové ploše. Vypočtete rozdíl výšek nejvyššího a nejnižšího místa při střední vzdálenosti Země od Slunce, je-li oběžná doba Země kolem Slunce $T_z = 365,25$ dní.

Poznámka. Jelikož hladina kapaliny v hydrostatice tvoří ekvipotenciální plochu, udávala by tato hodnota stoupnutí hladiny oceánu na rovníku při přílivu oproti odlivu, ze zjednodušujících předpokladů, že

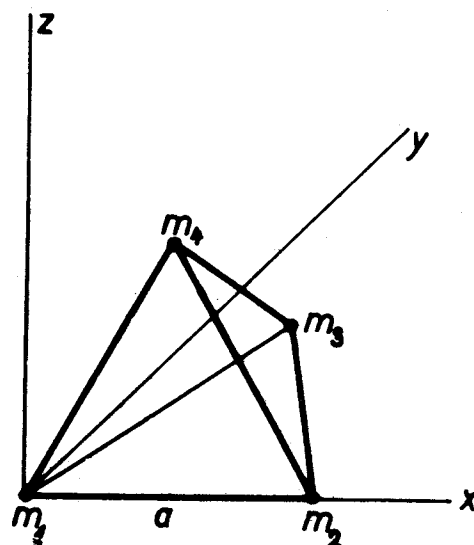
- uvažujeme jen vliv Slunce,
- zanedbáme sklon zemské osy vůči ekliptice,
- rotace Země je tak pomalá, aby se hladina oceánu stačila ustálit,
- lze zanedbat změnu původního gravitačního pole Země, způsobenou přemístěním vodních mas.

13. Jaký je poměr velikosti slapových sil od Měsíce a od Slunce? Počítejte se střední vzdáleností Slunce a Měsíce od Země. Oběžná doba (hvězdná) Měsíce kolem Země je $T_m = 27,3$ dní, jeho hmoty $M_m = M_z/81,3$. S použitím výsledku úlohy 12 odhadněte, jaká by (za zjednodušení b - d v úloze 12.) byla velikost přílivového vzduť za novoluní či za úplňku, kdy se vlivy Slunce a Měsíce zesilují, a jaká v první či třetí čtvrti měsíce, kdy oba vlivy působí proti sobě.

6. Základní úlohy mechaniky soustav hmotných bodů a tuhého tělesa

Řešené příklady

1. V rozích pravidelného čtyřstěnu jsou umístěny hmotné body o hmotách 2, 3, 4 a 5 kg. Délka hrany čtyřstěnu $a = 2$ m. Nalezněte polohu těžiště (hmotného středu) této soustavy hmotných bodů.



obr. 6,1

Řešení:

Soustavu souřadnou zvolíme např. tak, jak je znázorněno na obr. 6,1. Bod o hmotě 3 kg (budeme ho označovat jako první) leží v počátku soustavy souřadné, bod o hmotě 4 (druhý) na ose x , bod o hmotě 5 kg (třetí) v rovině x, y . Poloha čtvrtého hmotného bodu, který má hmotu 2 kg, je dána podmínkou, že body tvoří pravidelný čtyřstěn. Polohové vektory $\vec{r}_i$ a hmoty m_i prvního až čtvrtého bodu jsou

$$\begin{aligned} m_1 &= 3 \text{ kg}; \vec{r}_1 = (0, 0, 0) \text{ m} \\ m_2 &= 4 \text{ kg}; \vec{r}_2 = (2, 0, 0) \text{ m} \\ m_3 &= 5 \text{ kg}; \vec{r}_3 = (1, \sqrt{3}, 0) \text{ m} \\ m_4 &= 2 \text{ kg}; \vec{r}_4 = (1, \sqrt{3}/3, 2\sqrt{2}/3) \text{ m} \end{aligned}$$

Polohový vektor hmotného středu $\vec{r}_s = \sum_{i=1}^4 m_i \vec{r}_i / \sum_{i=1}^4 m_i$. Dosadíme-li do tohoto vzahu výše uvedené hodnoty, dostáváme pro jednotlivé souřadnice hmotného středu v naší zvolené soustavě souřadné

$$\begin{aligned} x_s &= (4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1) / 14 = 15/14 = 1,07 \text{ m}; \\ y_s &= 17 \cdot \sqrt{3} / 42 = 0,700 \text{ m}; z_s = (2/7) \sqrt{2/3} = 0,233 \text{ m}. \end{aligned}$$

2. Stanovte největší rychlost, kterou může dosáhnout bod homogenní krychle o straně $a = 2$ m, rotuje-li krychle úhlovou rychlostí $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$. Hmotný střed krychle se pohybuje rychlostí $V_s = 1 \text{ m/s}$.

Řešení:

Pro rychlost $\vec{v}$ libovolného bodu krychle platí vyjádření

$$\vec{v} = \vec{V}_s + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

kde $\vec{V}_s$ je rychlost hmotného středu, $\vec{\omega}$ vektor úhlové rychlosti otáčení a $\vec{r}$ polohový vektor bodu, v němž určujeme rychlost vzhledem k hmotnému středu.

Máme-li danu velikost vektoru $\vec{\omega}$, velikost vektoru $\vec{\omega} \times \vec{r}$ bude největší pro bod koule nejvíce vzdálený od osy otáčení. Takovým bodem bude zřejmě některý z rohů krychle. Zvolíme-li soustavu souřadnou s počátkem ve středu krychle a s

mi ve směru jednotlivých stran krychle, bude mít jeden z vrcholů souřadnice $[a/2, a/2, a/2]$. Vzdálenost tohoto vrcholu od libovolné přímky jdoucí středem krychle, jejíž směr je určen jednotkovým vektorem $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ - tedy i libovolné osy otáčení - je dán výrazem

$$d = (a/2) \sqrt{3 - (v_1 + v_2 + v_3)^2}.$$

Maximum d nastane, když $v_1 + v_2 + v_3 = 0$. Uvážíme-li ještě podmínku jednotkového vektoru $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$, bude vzdálenost d největší pro takovou volbu v_1 a v_2 , která splňuje podmínku $v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2 = 1/2$. Hodnotu v_3 určíme ze vztahu $v_3 = -(v_1 + v_2)$. (Příkladem takové volby mohou být hodnoty $v_1 = 1/\sqrt{6}$, $v_2 = 1/\sqrt{6}$ a $v_3 = -2/\sqrt{6}$.)

Pro velikost rotační složky rychlosti $\vec{v}_r = \vec{\omega} \times \vec{r}$ dostáváme, při maximální hodnotě vzdálenosti $d = a\sqrt{3}/2$, $a = 2$ m a $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$, $v_r = a \cdot \omega \sqrt{3}/2 = \sqrt{3} \text{ m/s}$. Celková rychlost $\vec{v}$ vrcholu krychle bude v uvažovaném případě maximální, když vektory $\vec{v} = \vec{V}_s + \vec{\omega} \times \vec{r}$ a $\vec{V}_s$ budou rovnoběžné, což lze splnit pouze, když $\vec{\omega}$ bude kolmé k $\vec{V}_s$. potom v určitém periodicky se opakujícím okamžiku dosáhne rychlost vrcholu krychle maximální hodnoty velikosti rychlosti $v = V_s + v_r = (1 + \sqrt{3}) \text{ m/s}$.

3. Síla $\vec{F}$ má složky $F = (-1, 1, -1) \text{ N}$ a působí v bodě A o souřadnicích $A = [-2, 1, 0] \text{ m}$. Vypočítejte její moment vzhledem k bodu B o souřadnicích $B = [2, -1, 1] \text{ m}$ a vzhledem k ose, která prochází bodem B a její směr je určen vektorem $\vec{a}$ o složkách $a = (1, 1, 1) \text{ m}$. (Viz obr. 6,2.)

Řešení:

Moment síly vzhledem k bodu M je definován vektorovým součinem $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, kde $\vec{r}$ je polohový vektor působíště síly vzhledem k bodu, k němuž moment síly počítáme. Moment síly vzhledem k ose M^0 je průmět momentu síly vzhledem k libovolnému bodu na této ose do osy.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= A - B = (-4, 2, -1) \text{ m} \\ \vec{F} &= (-1, 1, -1) \text{ N} \\ \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} = (-1, -3, -2) \text{ Nm}. \end{aligned}$$

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

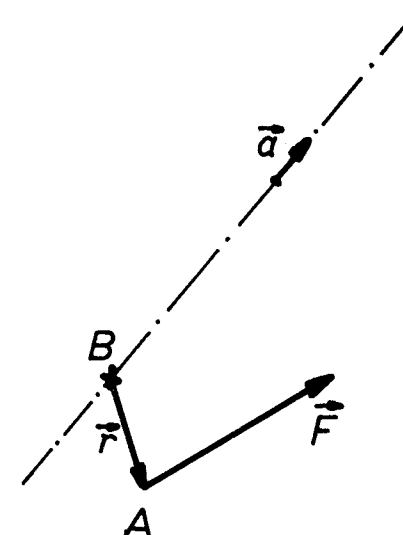
je jednotkový vektor ve směru osy, vzhledem ke které moment síly počítáme.

$$M^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \vec{M} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \text{ Nm} = -2\sqrt{3} \text{ Nm}.$$

4. Je dána soustava tří hmotných bodů o hmotách $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $m_3 = 3 \text{ kg}$. Jejich polohové vektory jsou dány jako funkce času

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= (2t, 4t, 5) \text{ m} \\ \vec{r}_2 &= (t^2 + 2, 1, 0) \text{ m} \\ \vec{r}_3 &= (1, t^2 + 2, 0) \text{ m}. \end{aligned}$$

Vypočítejte:



obr. 6,2

1. celkovou hybnost soustavy $\vec{P}$,
2. celkový moment hybnosti soustavy $\vec{B}$ vzhledem k počátku souřadné soustavy
3. výslednici $\vec{F}$ vnějších sil, které na soustavu působí,
4. výsledný moment $\vec{M}$ vnějších sil vzhledem k počátku souřadné soustavy.

Řešení:

Vypočítáme rychlosti, hybnosti a momenty hybnosti jednotlivých hmotných bodů vzhledem k počátku souřadné soustavy

$$\vec{v}_1 = (2, 4, 0) \text{ ms}^{-1}; m_1 \vec{v}_1 = (2, 4, 0) \text{ kgms}^{-1}; \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 = (-20, 10, 0) \text{ kgm}^2 \text{s}^{-1}$$

$$\vec{v}_2 = (2t, 0, 0) \text{ ms}^{-1}; m_2 \vec{v}_2 = (4t, 0, 0) \text{ kgms}^{-1}; \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = (0, 0, -4t) \text{ kgm}^2 \text{s}^{-1}$$

$$\vec{v}_3 = (0, 2t, 0) \text{ ms}^{-1}; m_3 \vec{v}_3 = (0, 6t, 0) \text{ kgms}^{-1}; \vec{r}_3 \times m_3 \vec{v}_3 = (0, 0, +6t) \text{ kgm}^2 \text{s}^{-1}$$

Celkovou hybnost soustavy $\vec{P}$, celkový moment hybnosti soustavy $\vec{B}$, výslednici vnějších sil $\vec{F}$ a výsledný moment vnějších sil $\vec{M}$ vypočítáme ze vzorců:

$$1. \vec{P} = \sum_{i=1}^3 m_i \vec{v}_i = (2 + 4t, 4 + 6t, 0) \text{ kgms}^{-1}$$

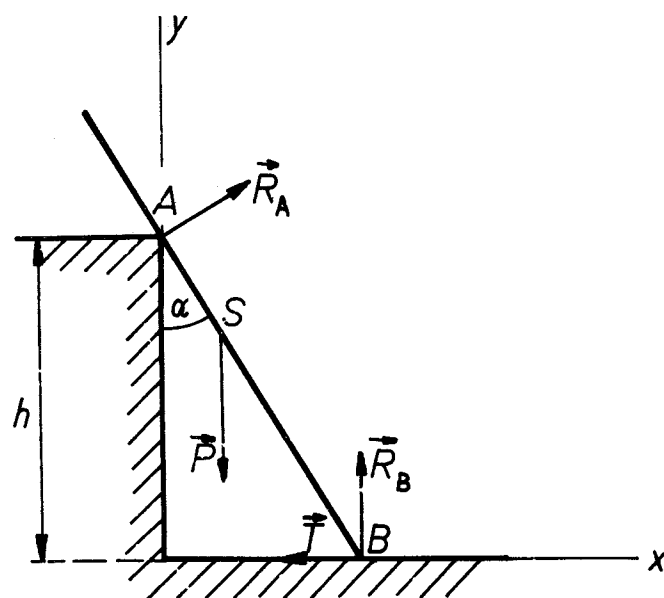
$$2. \vec{B} = \sum_{i=1}^3 \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = (-20, 10, 2t) \text{ kgm}^2 \text{s}^{-1}$$

$$3. \vec{F} = \vec{F}; \vec{F} = (4, 6, 0) \text{ N}$$

$$4. \vec{M} = \vec{B}; \vec{M} = (0, 0, 2) \text{ Nm.}$$

Tečkou je značena derivace dle času.

5. Homogenní tyč váhy $\vec{P}$ a délky $\ell > h$ je opřena o stěnu výšky h , se kterou svírá úhel α (viz obr. 6,3). Určete síly $\vec{R}_A$ a $\vec{R}_B$, kterými působí stěna a vodorovná podložka na tyč a tření $\vec{T}$ v bodě B, jestliže tyč je v klidu. Tření tyče a stěny v bodě A zanedbejte.



obr. 6,3

Řešení:

Tyč bude v klidu, jestliže slednice na ni působících sil $\vec{F}$ bude rovna nule a výsledný moment těchto sil $\vec{M}$ vzhledem k libovolnému bodu bude roven nule. Na tyč působí v jejím hmotném středu S váha svisle dolů, v bodě A reakce stěny $\vec{R}_A$ kolmá k tyči a v bodě B reakce stěny $\vec{R}_B$ kolmá k vodorovné podložce a tření $\vec{T}$ ve směru vodorovné podložky. Momenty sil budeme počítat vzhledem k bodu B. Vektor $\vec{BS}$ označme symbolem $\vec{r}_S$ a vektor $\vec{BA}$ symbolem $\vec{r}_A$. Potom platí

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{M} = \vec{r}_S \times \vec{P} + \vec{r}_A \times \vec{R}_A = 0 \quad (2)$$

osy x a y souřadné soustavy, ve které dále budeme počítat, jsou nakresleny na obr. 6,3, osa z míří kolmo před nákresem.

Vyjádříme-li rovnice (1) a (2) ve složkách ve zvolené souřadné soustavě, dostaneme

$$\begin{aligned} R_A \cos \alpha - T &= 0 \\ -P + R_B - R_A \sin \alpha &= 0 \\ -\frac{R_A h}{\cos \alpha} + \frac{\ell}{2} P \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Z těchto vztahů již snadno spočítáme R_A , R_B a T .

6. Dva hmotné body M_1 , M_2 o hmotách $m_1 = m_2 = 100 \text{ g}$ se pohybují ve vodorovné rovině a srazí se. O srážce předpokládejte, že je dokonale pružná. Před srážkou je $\vec{v}_1 = (5; 0) \text{ cm/s}$ a $\vec{v}_2 = 0$.

Vypočítejte:

1. rychlost hmotného středu $\vec{v}_S$,
2. celkovou hybnost $\vec{P}$,
3. rychlosti obou hmotných bodů před srážkou a po srážce v laboratorní soustavě souřadnic a v těžištové soustavě souřadnic.

Poznámka: Soustava souřadná, ve které je před srážkou jeden z hmotných bodů (např. M_2) v klidu, se nazývá laboratorní, souřadná soustava, ve které je hmotný střed v klidu, se nazývá těžištová.

Řešení: $m_1 = m_2 = 100 \text{ g}$; $\vec{v}_1 = (5; 0) \text{ cm/s}$; $\vec{v}_2 = (0, 0) \text{ cm/s}$.

$$1. \vec{v}_S = \frac{\vec{r}_S}{r_S} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = (2, 5; 0) \text{ cm/s.}$$

$$2. \vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_S = (500; 0) \text{ gcm/s.}$$

3. a) Řešení v laboratorní souřadné soustavě. Označme $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ rychlosti hmotných bodů v laboratorní soustavě před srážkou, $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$ jejich rychlosti po srážce.

Platí zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

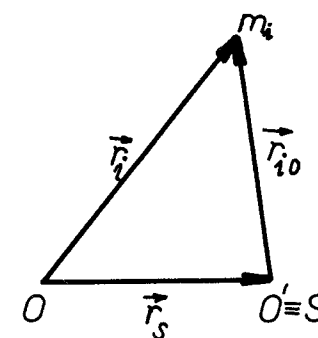
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Dosadíme-li $m_1 = m_2$ a $\vec{v}_2 = 0$, dostaneme

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

Z těchto dvou rovnic je vidět, že z vektorů $\vec{v}_1$, $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$ lze utvořit pravoúhlý trojúhelník s přeponou $\vec{v}_1$, nebo může nastat případ výměny rychlostí; $\vec{v}_1' = 0$ a $\vec{v}_2' = \vec{v}_1$. Po srážce se tedy oba hmotné body rozletí pod pravým úhlem. Více o směru a velikosti $\vec{v}_1'$ a $\vec{v}_2'$ ze zákona zachování energie a hybnosti neplyne.



obr. 6,4

b) Řešení v těžiškové soustavě. Počátek těžiškové soustavy O' položíme do hmotného středu S , osy x' a y' nechť jsou rovnoběžné s osami x a y laboratorní soustavy. Označme polohové vektory obou hmotných bodů v těžiškové soustavě $\vec{r}_{10}$, $\vec{r}_{20}$, jejich rychlosti před srážkou $\vec{v}_{10}$, $\vec{v}_{20}$, po srážce $\vec{v}'_{10}$, $\vec{v}'_{20}$.

Mezi těžiškovou a laboratorní soustavou platí tyto transformační rovnice (viz obr. 6.4):

$$\vec{r}_{10} = \vec{r}_1 - \vec{r}_S = \frac{m_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}_{20} = \vec{r}_2 - \vec{r}_S = -\frac{m_1 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_{10} = \frac{m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_{20} = -\frac{m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2}$$

Rychlosti po srážce $\vec{v}'_{10}$, $\vec{v}'_{20}$ se spočítají ze zákona zachování hybnosti a zákona zachování energie. V těžiškovém systému je celková hybnost $\vec{P}' = 0$.

$$m_1 \vec{v}'_{10} + m_2 \vec{v}'_{20} = 0$$

$$m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20} = 0$$

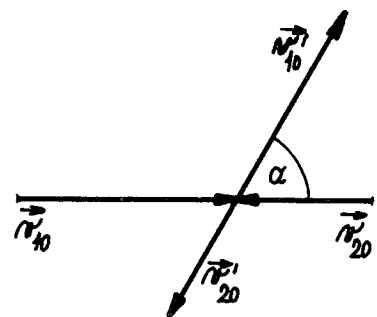
$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{10}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}'^2$$

Z těchto rovnic spočítáme, že

$$v_{10} = v_{10}'$$

$$v_{20} = v_{20}'$$

a můžeme nakreslit obrázek 6.5. Úhel α (úhel $\vec{v}_{10}$ a $\vec{v}'_{10}$) není určen ze zákona zachování hybnosti a energie, ale závisí na silách působících mezi oběma hmotnými body.



obr. 6,5

Položíme-li $m_1 = m_2 = 100$ g, $\vec{v}_1 = (5, 0)$ cm/s, $\vec{v}_2 = 0$, dostaneme pro rychlosti před srážkou a po srážce v těžiškové soustavě:

$$\vec{v}_{10} = (2,5; 0) \text{ cm/s}$$

$$\vec{v}_{20} = (-2,5; 0) \text{ cm/s}$$

$$v_{10} - v_{20}' = 2,5 \text{ cm/s}$$

Úhel α mezi $\vec{v}_{10}$ a $\vec{v}'_{10}$ určit nemůžeme, protože neznáme zákon sil, kterými na sebe hmotné body působí.

rychlostí v těžiškové soustavě k rychlostem v laboratorní soustavě se dostaneme odečtením rychlosti $\vec{v}_{20}$ (viz obr. 6,6).

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_{10} - \vec{v}_{20}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}'_{20} - \vec{v}_{20}$$

Jestliže $m_1 = m_2$, pak $v_{10} = v_{20} = v_{10}' = v_{20}'$ a snadno se dá ukázat, že $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ svírají pravý úhel.

7. Na vodorovném homogenním kotouci hmoty M a poloměru R , který je v klidu, stojí člověk hmoty m . Kotouč se může otáčet bez tření kolem svislé osy procházející jeho středem. Jakou úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ se bude otáčet kotouč, půjde-li člověk po kružnici poloměru r , opsané kolem středu kotouče, relativní rychlostí $\vec{v}$ vzhledem ke kotouci?

Řešení:

Zachovává se moment hybnosti $\vec{B}$ soustavy skládající se z člověka a kotouče, protože výsledný moment vnějších sil vzhledem k ose otáčení se rovná nule. Na počátku je člověk i kotouč v klidu, je tedy $\vec{B} = 0$. Pohybuje-li se člověk vzhledem ke kotouci úhlovou rychlostí $\vec{\omega}'$, bude se kotouč otáčet úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ takovou, aby platilo

$$\vec{B} = I_k \vec{\omega} + I_c (\vec{\omega} + \vec{\omega}') = 0 \quad (1)$$

V této rovnici je $I_k = \frac{1}{2} m R^2$ moment setrvačnosti kotouče vzhledem ke svislé ose procházející jeho středem, $I_c = m r^2$ je moment setrvačnosti člověka vzhledem k téže ose, $\vec{\omega}$ a $\vec{\omega}'$ mají směr osy otáčení kotouče, $\omega' = v/r$.

Z rovnice (1) vypočítáme úhlovou rychlost

$$\vec{\omega} = -\frac{I_c}{I_k + I_c} \vec{\omega}' \quad (2)$$

Úhlová rychlost $\vec{\omega}$ má tedy velikost $\omega = m r v / (\frac{1}{2} M R^2 + m r^2)$ a opačný smysl než úhlová rychlost $\vec{\omega}'$.

8. Jaké maximální rychlosti dosáhne raketa, která nese palivo o hmotě M a její vlastní hmoty je m_0 ? Splodiny hoření jsou z rakety vystřelovány stálou rychlostí $\vec{u}$. Počáteční rychlost rakety je nulová.

Řešení:

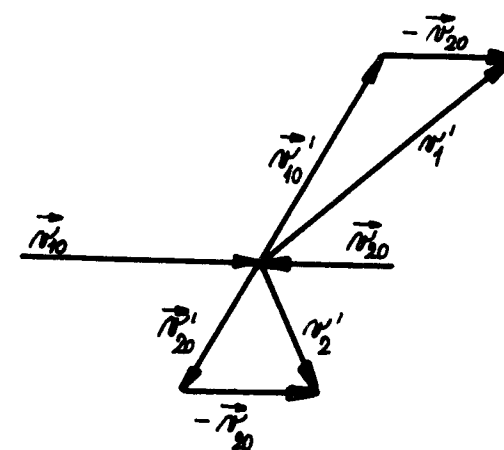
V čase t má raketa hmotu m a rychlost $\vec{v}$, její hybnost je $m\vec{v}$. Za čas dt jsou z rakety vystřeleny plyny o hmotě dm_1 , jejichž rychlost vzhledem k inerciální souřadné soustavě je $\vec{v}_1$. Raketa tím ztrácí hmotu $dm = -dm_1$ a její rychlost se změní o $d\vec{v}$. Hybnost soustavy skládající se z rakety a z plynů vypustěných za čas dt je v čase $t + dt$ rovna $(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm \vec{v}_1$. Ze zákona zachování hybnosti soustavy pak dostáváme rovnici

$$m\vec{v} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm \vec{v}_1 \quad (1)$$

kterou po zanedbání nekonečně malé veličiny druhého řádu $dm d\vec{v}$ můžeme upravit na tvar

$$m d\vec{v} = (\vec{v}_1 - \vec{v}) dm \quad (2)$$

Vztáhneme-li změny hmoty a rychlosti k času, dosadíme-li relativní rychlost vystřelených plynů vůči raketě $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ a předpokládáme-li, že na raketu působí



obr. 6,6

ještě vnější síla $\vec{F}$, dostáváme Mescerakého rovnici pro pohyb tělesa s proměnnou hmotou

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{dm}{dt} \quad (3)$$

V rovnici (3) bývá výraz $\vec{u} \frac{dm}{dt}$ uvažován jako síla uvádějící raketu do pohybu a nazýván tažnou (reaktivní) silou.

Při vyšetřování maximální rychlosti rakety budeme předpokládat vnější sílu $\vec{F} = 0$. Je-li počáteční rychlost nulová, z podmínky konstantní rychlosti $\vec{u} = \vec{v}_1$ plyne, že se raketa bude pohybovat po přímce. Z rovnice (2) pak dostáváme

$$m dv = -u dm \quad (4)$$

a dále

$$dv = -u \frac{dm}{m} \quad (5)$$

Integrací

$$v = -u \ln m + C; \quad (6)$$

Konstantu C určíme z podmínky, že v čase $t = 0$ je $v = 0$ a $m = M + m_0$

$$C = u \ln (M + m_0). \quad (7)$$

Potom

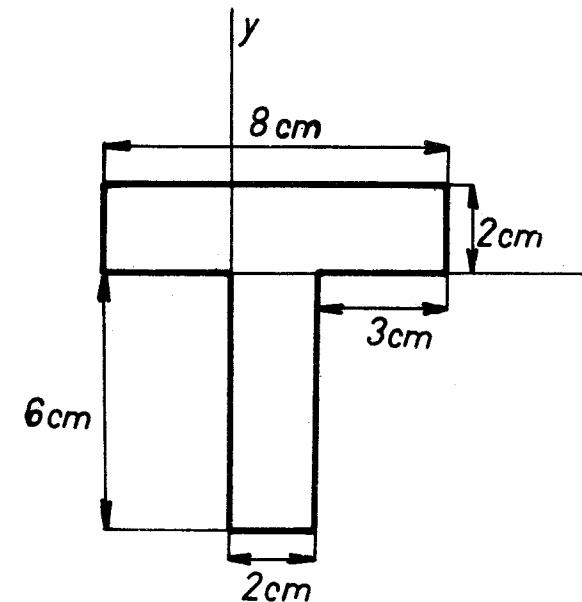
$$v = u \ln \frac{M + m_0}{m} \quad (8)$$

Nejvyšší hodnotu $v_{\max}$ dosáhne raketa pro nejmenší hodnotu m , která po vyhoření veškerého paliva je m_0 ; tedy

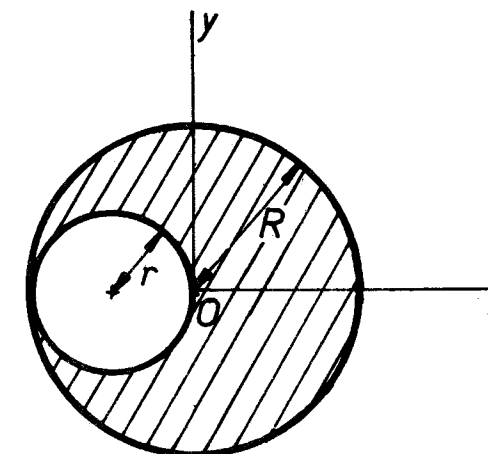
$$v_{\max} = u \ln \frac{M + m_0}{m_0} \quad (9)$$

Úlohy

1. V rozích čtverce o straně $a = 20$ cm jsou umístěny hmotné body o hmotách $m_1 = 10$ g, $m_2 = 20$ g, $m_3 = 30$ g, $m_4 = 40$ g. Najděte polohu hmotného středu.
2. Tři hmotné body o hmotách $m_1 = m_2 = m_3 = 60$ g jsou umístěny v rozích rovnostranného trojúhelníka o straně $a = 20$ cm. Najděte polohu jejich hmotného středu.
3. Nalezněte polohu hmotného středu homogenní desky tvaru písmene T, jejíž rozměry jsou zakresleny na obrázcích 6,7.
4. Hustota tyče všude stejného průřezu roste rovnoměrně od jednoho konce k druhému podle vztahu $\rho = ax, a > 0$, konstantní. Najděte polohu hmotného středu tyče, je-li celková délka tyče l .
5. V homogenním disku o poloměru $R = 10$ cm je vyřezán otvor o poloměru $r = 5$ cm, jehož poloha je vyznačena na obrázku 6,8. Najděte polohu hmotného středu.
6. Stanovte polohu hmotného středu homogenní polokoule.
7. Stanovte polohu hmotného středu koule o poloměru $R = 2$ cm, jejíž jedna polokoule je z olova (hustota $\rho_1 = 11,3$ g/cm³) a druhá polokoule z cínu ($\rho_2 = 7,2$ g/cm³).

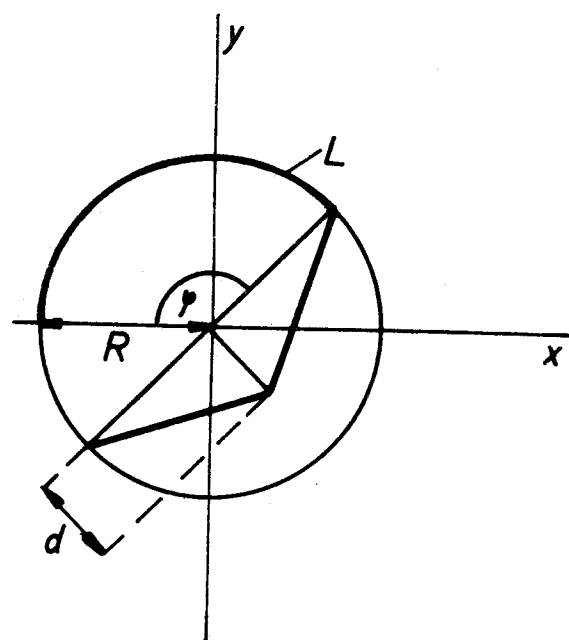


obr. 6,7



obr. 6,8

9. Určete největší rychlost $v_{\max}$ a nejmenší rychlost $v_{\min}$, jakou se mohou



obr. 6,9

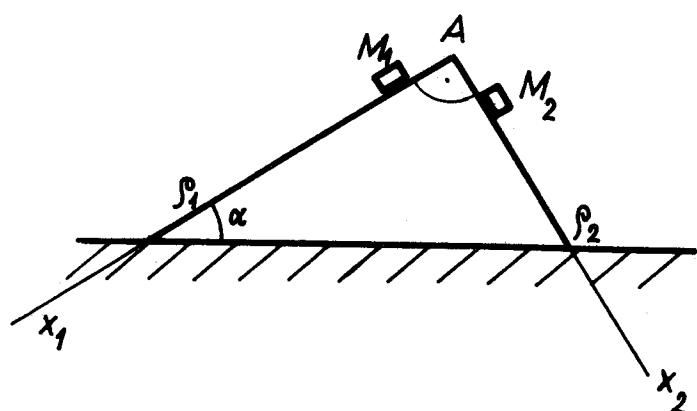
pohybovat vzhledem k silnici osy šlapak jízdního kola, které jede rychlostí $v_S = 30$ km/hod. Zubaté kolečko v zadním kole má 18 zubů, kolo v ose šlapak 54 zubů. Délka kliky šlapak (vzdálenost osy šlapky od společné osy otáčení obou šlapak) $l = 18$ cm. Poloměr zadního kola $R = 35$ cm. Předpokládejte, že kolo na silnici nepodklouzává.

10. Zvolte pravotočivou kartézskou soustavu souřadnou s počátkem ve středu Slunce, s osou x mířící k periheliu a osou y zvolenou též v rovině ekliptiky takovým způsobem, že Země obíhá v rovině x, y v kladném smyslu. V této soustavě souřadné stanovte rychlost bodů na povrchu Země, nachází-li se Země v periheliu a afeliu. Pro tyto dva případy určete,

které body Země budou mít v určitém okamžiku maximální a minimální rychlost vzhledem k zvolené soustavě souřadné. Velikost maximálních a minimálních rychlostí udejte číselně. Vliv Měsíce, precese a nutace zemské osy a další obdobné vlivy působící na oběh Země kolem Slunce zanedbejte.

11. Vypočítejte moment $\vec{M}$ síly $\vec{F}$ vzhledem k bodu B. Síla $\vec{F}$ působí v bodě A. $\vec{F} = (2, -4, 5)$ N; A = $[1, 2, 2]$ m; B = $[-2, -1, -1]$ m.

12. V homogenním tíhovém poli jsou umístěny 2 nakloněné roviny ρ_1, ρ_2 svírající spolu pravý úhel. Rovina ρ_1 svírá s vodorovnou rovinou úhel α (viz obr. 6,10). Ve stejný okamžik vypustíme volně z bodu A, který leží na průsečnici obou rovin, dva hmotné body M_1, M_2 o hmotách m_1, m_2 . Nechť hmotný bod M_1 se začne pohybovat po rovině ρ_1 a hmotný bod M_2 po rovině ρ_2 . Pomocí I. věty impulsové respektive věty o pohybu hmotného středu soustavy, stanovte pohyb hmotného středu soustavy skládající se z hmotných bodů M_1, M_2 .



obr. 6,10

13. Střela se v nejvyšším bodě své dráhy ve výšce $h = 19,6$ m roztrhla na dvě stejné části. Za dobu $\tau = 1$ sec po výbuchu dopadla první část na zem pod bod dráhy, ve kterém nastal výbuch.

1. Jaká je vzdálenost s_2 místa výstřelu a místa dopadu druhé části střely, dopadla-li první část do vzdálenosti $s_1 = 1000$ m od místa výstřelu.

2. Napište rovnici dráhy hmotného středu obou částí střely.

14. Hmotný bod o hmotě $m = 4$ g koná kruhový pohyb. Vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega} = (1, 2, 3)$ s⁻¹. Polohový vektor bodu je v určitém okamžiku $\vec{r} = (1, 1, 1)$ cm. Vypočítejte moment hybnosti hmotného bodu v tomto okamžiku vzhledem k počátku souřadné soustavy.

15. Vypočítejte moment hybnosti $\vec{B}$ vzhledem k libovolnému bodu na ose rotace a) hmotného bodu o hmotě m , který rotuje úhlovou rychlostí ω po kružnici o poloměru a ,

b) dvou hmotných bodů o hmotách $m_1 = m_2 = m/2$ spojených tuhou nehmotnou tyčí délky $2a$, která se otáčí úhlovou rychlostí ω kolem osy kolmé k jejich spojovací tyči a procházející hmotným středem.

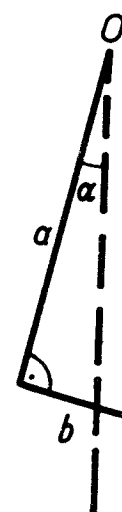
16. Tuhé těleso se skládá ze dvou hmotných bodů o hmotách $m_1 = m$ a $m_2 = 3$ m spojených tuhou nehmotnou tyčí délky l . Otáčí se časově proměnnou úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ kolem osy kolmé ke spojovací tyči a procházející hmotným středem tělesa. Hmotný střed tělesa je v klidu. Vypočítejte

a) výslednici vnějších sil $\vec{F}$, které na toto těleso působí,

b) výsledný moment vnějších sil $\vec{M}$ vzhledem k nějakému bodu na ose otáčení.

17. Tuhé těleso se skládá ze dvou hmotných bodů M_1, M_2 o hmotách $m_1 = m_2 = 1$ kg spojených tuhou nehmotnou tyčí délky $l = 1$ m. V čase $t = 0$ začne na hmotný bod M_1 působit síla $\vec{F}_1 = (-1, 1, 0)$ N a na hmotný bod M_2 síla $\vec{F}_2 = (2, -2, 0)$ N. V čase $t = 0$ jsou oba hmotné body v klidu a mají polohu danou souřadnicemi $M_1 = [0, 0, 0]$ m, $M_2 = [l, 0, 0]$ m. Jak se pohybuje hmotný střed tohoto tuhého tělesa?

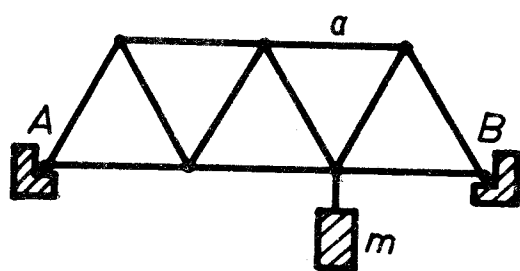
18. Zalomená tyč tvaru písmene L s rameny stejného průřezu ze stejného materiálu délky a, b je zavěšena v bodě O v homogenním gravitačním poli (viz obr. 6,11). Jaký úhel α svírá rameno a se svislým směrem, je-li tyč v rovnovážné poloze?



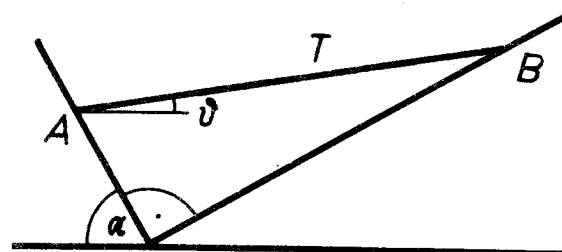
obr. 6,11

19. Mějme konstrukci dle obr. 6,12, která je složena ze stejně dlouhých tyčí spojených otočnými klouby. Hmotu tyčí zanedbáme. Na konstrukci visí v naznačeném místě závaží hmoty m . Určete velikost sil F_A a F_B , kterými působí konstrukce na podložku v místech A a B a napětí v tyči a .

20. Stanovte pro jaký úhel β (úhel, který svírá tyč s vodorovnou rovinou) bude v rovnováze tyč T hmoty m ležící na dvou hladkých rovinách, které spolu svírají pravý úhel a jejichž průsečnice je vodorovná. Tyč je kolmá k průsečnici a jedna z rovin svírá s vodorovnou rovinou úhel α (obr.

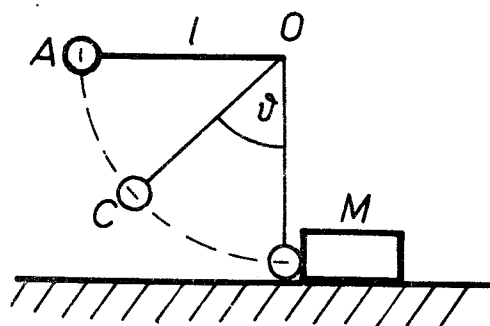


obr. 6,12



obr. 6,13

1. Jaká je rychlost hmotného du soustavy $\vec{v}_s$?
 2. Jaká je hybnost spojených hmotných bodů $\vec{P}$?
 3. Jaká je hybnost spojených hmotných bodů v těžišťové souřadné soustavě $\vec{P}_0$?
 4. Jaký je poměr E_k'/E_k kinetické energie po srážce ke kinetické energii před srážkou?
 5. Pro které otázky (1 - 4) je třeba vědět, zda se body po srážce spojily?
23. Dřevěný hranol o hmotě $m_2 = 3$ kg leží na vodorovné podložce. Je zasažen střílou o hmotě $m_1 = 5$ g. Střela v něm zůstane a hranol se posune po podložce 25 cm. Koeficient tření mezi hranolem a podložkou je 0,2. Vypočítejte rychlost střely.



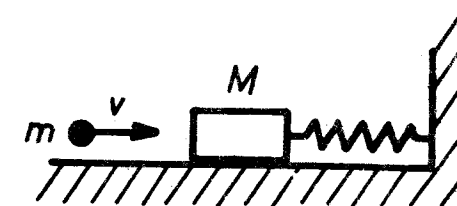
obr. 6,14

6,13). Určete velikosti sil F_A, F_B , kterými tyč působí na roviny v místech A a B. Neuvažujte případy, kdy tyč leží podél jedné ze stěn.

21. Na kouli hmoty m_2 pohybující se rychlostí $\vec{u}_2$ narazí jiná stejně velká koule hmoty m_1 , která se pohybuje rychlostí $\vec{u}_1$ v téže směru. Koule jsou homogenní a jejich hmotné středy se pohybují po téže přímce. Srážku pokládejte: 1. za dokonale pružnou, 2. za dokonale nepružnou a spočítejte rychlosti $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$ koulí po srážce v případě 2) úbytek kinetické energie.
22. Dva hmotné body o hmotách $m_1 = 2$ g, $m_2 = 5$ g mají před srážkou, během srážky se trvale spojí, rychlosti $\vec{v}_1 = (10, 0, 0)$ cm/s, $\vec{v}_2 = (3, 5, 0)$ cm/s.

1. Jaká je rychlost hmotného du soustavy $\vec{v}_s$?
 2. Jaká je hybnost spojených hmotných bodů $\vec{P}$?
 3. Jaká je hybnost spojených hmotných bodů v těžišťové souřadné soustavě $\vec{P}_0$?
 4. Jaký je poměr E_k'/E_k kinetické energie po srážce ke kinetické energii před srážkou?
 5. Pro které otázky (1 - 4) je třeba vědět, zda se body po srážce spojily?
23. Dřevěný hranol o hmotě $m_2 = 3$ kg leží na vodorovné podložce. Je zasažen střílou o hmotě $m_1 = 5$ g. Střela v něm zůstane a hranol se posune po podložce 25 cm. Koeficient tření mezi hranolem a podložkou je 0,2. Vypočítejte rychlost střely.
24. Koule hmoty m je upevněna v gravitačním poli na vlákně délky l , které se může otáčet kolem bodu O (viz obr. 6,14). Koule je vypuštěna z klidu z bodu A, který je ve stejné výšce jako bod O. Koule srazí se s hranolem hmoty M ležícím na vodorovné podložce a odskočí do bodu C (nedokonale pružný ráz). Vypočítejte rychlost v_1 , kterou má koule těsně před srážkou s hranolem, rychlost v_2 , kterou má koule těsně po srážce, rychlost v hranolu těsně po srážce a koeficient restituce k . Určete velikost úhlu δ^* , je-li srážka mezi hranolem a koulí dokonale pružná.
25. Kulička z plastelíny o hmotě $m = 10$

pohybující se rychlostí $v = 700$ cm/s narazí na blok hmoty $M = 900$ g a uvízne v něm. Blok leží v klidu na stole a je upevněn na pružině, která není před nárazem stlačená (viz obr. 6,15). Koeficient tření f mezi blokem a stolem je 0,25, pružinová konstanta $k = 9,8 \cdot 10^4$ dyn/cm, pružinu pokládejte za nehmotnou. Vypočítejte maximální stlačení pružiny.



obr. 6,15

26. Krasobruslař dělá na hladkém ledě piruety. Při rozpažení se otáčí s úhlovou rychlostí $\omega_1 = 6,28$ s⁻¹. S jakou úhlovou rychlostí se bude otáčet, když připaží? Moment setrvačnosti krasobruslaře odhadněte takto: má-li bruslař připáženo, pokládejte ho za válec o hmotě 60 kg a poloměru 0,2 m (moment setrvačnosti I_2), při rozpažení ho pokládejte za složený z válce o hmotě 52 kg a poloměru 0,2 m a dvou tyčí kolmých k ose otáčení; každá tyč má hmotu 4 kg, délku $l = 0,6$ m a její hmotný střed je vzdálen 0,5 m od osy otáčení (moment setrvačnosti I_1).
27. Vodorovný kotouč poloměru R a momentu setrvačnosti I se volně otáčí kolem svislé osy procházející jeho středem s konstantní úhlovou rychlostí ω_1 . Na jeho okraji stojí člověk hmoty m . Jak se změní úhlová rychlost kotouče, přejde-li člověk z jeho okraje do středu? Jak se při tom změní kinetická energie celé soustavy?
28. Jaká je tažná síla F rakety, která spálí za vteřinu 10 kg paliva a produkty hoření tryskají z rakety rychlostí $u = 10^3$ m/s? Jaké je počáteční zrychlení a_0 rakety a jaké je její zrychlení a_f těsně před shořením veškerého paliva, je-li vlastní hmoty rakety $m_0 = 50$ kg a v raketě je před zapálením motorů $M = 100$ kg paliva? Jakou rychlost v_m dosáhne raketa po shoření veškerého paliva, je-li její počáteční rychlost nulová? Předpokládejte, že na raketu kromě tažné síly nepůsobí jiná síla.
29. Můžeme-li dosáhnout nejvýše rychlosti $u = 3 \cdot 10^3$ m/s produktů hoření vůči raketě, jaký musí být poměr výchozí hmoty m a konečné hmoty m_0 rakety, abychom dosáhli rychlosti rakety $v_m = 8 \cdot 10^3$ m/s.
30. Uvažujte nádobu z úlohy 42. kap. 2 a předpokládejte, že otvor není ve dně nádoby, ale na jejím boku těsně nade dnem. Můžete pro stanovení konečné rychlosti nádoby užít výsledku řešeného příkladu 8?

7. Otáčení tuhého tělesa

Řešené příklady

1. Vypočítejte momenty setrvačnosti homogenního kvádru $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$ kolem souřadných os x , y , z a kolem úhlopříčky kvádru.

Řešení:

Momenty setrvačnosti lze v mnoha případech, pokud jde o homogenní tělesa (hustota ρ konstantní), počítat ze vztahů (např. pro J_{zz} - moment setrvačnosti vzhledem k ose z)

$$J_{zz} = M(\bar{x}^2 + \bar{y}^2),$$

kde $M = \rho V$, V je hmota tělesa,

$\bar{x}^2 = V^{-1} \iiint_V x^2 dV = V^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 S(x) dx$ a podobně je definováno $\bar{y}^2$. Objem tělesa $V = \iiint_V dV = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x) dx$; Λ je prostorová oblast, kterou těleso vyplňuje a přes kterou integrujeme. Přitom $S(\xi) = \int_{\Sigma(\xi)} dy dz$ jsme označili plošný obsah rovinné oblasti $\Sigma(\xi)$, která tvoří řez tělesa Λ rovinou $x = \xi$. (Neprotíná-li tato rovina těleso, je $S(\xi) = 0$.) Pro kvádr vyjde $S(\xi) = 4bc$ pro $|\xi| \leq a$, jinak $S(\xi) = 0$. Dostaneme

$$\bar{x}^2 = \frac{a^2}{3}, \text{ podobně } \bar{y}^2 = \frac{b^2}{3}, \bar{z}^2 = \frac{c^2}{3}. \text{ Tedy } J_{zz} = M \frac{a^2 + b^2}{3}, J_{xx} =$$

$$= M \frac{b^2 + c^2}{3}, J_{yy} = M \frac{a^2 + c^2}{3}. \text{ Moment setrvačnosti kolem úhlopříčky se vypočte dle vztahu } J_{\vec{n}} = \sum_{i,j=1}^3 J_{ij} n_i n_j, \text{ kde } J_{\vec{n}} \text{ je moment kolem osy, jejíž směr je dán jednotkovým vektorem } \vec{n} = (n_1, n_2, n_3), J_{ik} \text{ jsou složky tenzoru setrvačnosti. V našem případě } \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} (a, b, c) \text{ a nediagonální složky } J_{ik}$$

jsou nulové (viz úlohu 5). Tedy

$$J_{\vec{n}} = \frac{M}{3(a^2 + b^2 + c^2)} [(b^2 + c^2)a^2 + (a^2 + b^2)c^2 + (a^2 + c^2)b^2] = \frac{2}{3} M \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

2. Přes kladku o momentu setrvačnosti J a o poloměru R je vedeno lanko o zanedbatelné hmotě, na jehož koncích jsou závaží o hmotách m_1, m_2 ($m_1 > m_2$). S jakým zrychlením bude klesat těžší závaží? Lano po kladce neklouže.

Řešení:

Lze vyjít například z II. věty impulsové. Celkový moment hybnosti soustavy vzhledem k ose kladky se skládá z momentů hybnosti kladky a obou závaží. Klesá-li závaží m_1 rychlostí v , má vzhledem k ose moment hybnosti $m_1 v R$, závaží m_2 pak moment hybnosti $m_2 v R$, kladka (úhlová rychlost $\frac{v}{R}$) $\frac{Jv}{R}$. Celkový moment vnějších sil je dán rozdílem (proti sobě působících) momentů vah závaží: $m_1 g R - m_2 g R$. II. věta tedy dává

$$\frac{d}{dt} (m_1 v R + m_2 v R + \frac{Jv}{R}) = m_1 g R - m_2 g R$$

$$\text{zrychlení je tedy konstantní a rovná } \frac{dv}{dt} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}} g.$$

3. Nezatížený třífázový elektromotor o 2800 otáčkách za minutu se po vypnutí zastaví během 30 s vlivem tření v ložiskách, které vyvolává konstantní brzdicí moment D . Jak velký je moment D a kolik otáček vykoná rotor po vypnutí do úplného zastavení? Rotor lze pokládat za železný válec o průměru $2R = 8$ cm a délce $v = 7$ cm, nasazený na železné ose o průměru $2r = 2$ cm, dlouhé 15 cm. Měrná hmota železa $\rho = 7,8$ g/cm³.

Řešení:

Moment setrvačnosti válce (včetně části osy uvnitř o délce 7 cm) je

$$\frac{1}{2} (\pi R^2 v \rho) R^2 = \frac{\pi}{2} R^4 v \rho = 22 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2,$$

moment setrvačnosti zbytku osy (délka $\ell_1 = 8$ cm) je

$$\frac{1}{2} (\pi r^2 \ell_1 \rho) R^2 = \frac{\pi}{2} r^4 \ell_1 \rho = 0,1 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2,$$

tedy celkový moment setrvačnosti $J = 2,21 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$.

Pohybová rovnice $J\ddot{\varphi} = -D$ dává rovnoměrné zpomalení pohybu, úhlová rychlost $\dot{\varphi} = \omega_0 - \frac{D}{J} t$, úhel otočení $\varphi = \omega_0 t - \frac{D}{2J} t^2$ (klademe čas $t = 0$, $\varphi = 0$ a $\dot{\varphi} = \omega_0$ v okamžiku vypnutí). V okamžiku zastavení $\dot{\varphi} = 0$, tedy $D = J\omega_0/t = 21,56 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}$, úhel otočení je pak $\varphi = \frac{1}{2} \omega_0 t$, počet otáček $\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0 t}{4\pi} = 700$.

4. Homogenní válec o poloměru $R = 0,1$ m a o hmotě $M = 10$ kg se valí bez klouzání po nakloněné rovině se sklonem $\alpha = 30^\circ$

a) ve směru spádové křivky,

b) ve směru, který svírá úhel $\gamma = 60^\circ$ se spádovou přímkou.

Stanovte dráhu S , kterou válec urazí od vypuštění za čas t , spec. $t = 1$ s. Dále stanovte sílu $\vec{F}$, kterou působí na válec nakloněná rovina.

Řešení:

Je-li úhel otočení válce φ , je uražená dráha $R\varphi$ a úhlová rychlost $\dot{\varphi}$. Okamžitou osou rotace je dotyková příčka mezi rovinou a válcem, odpovídající moment setrvačnosti je $J = \frac{3}{2} MR^2$, kinetická energie $\frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2$. Průmět dráhy těžiště $R\varphi$ do směru spádové přímky získáme násobením $\cos \gamma$, průmět do svislého směru ještě násobením $\sin \alpha$. Potenciální energie je tedy $-Mg R\varphi \cos \gamma \sin \alpha$ a věta o zachování energie

$$\frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2 - (Mg R \cos \gamma \sin \alpha) \varphi = \text{konst} = 0 \text{ (volíme na počátku pohybu } \varphi = 0)$$

Označíme-li $b = (Mg R \cos \gamma \sin \alpha)/J$, je $\dot{\varphi} = \sqrt{2b\varphi}$, integrací $\varphi = \frac{1}{2} bt^2$.

Uražená dráha $s = R\varphi = \frac{2}{3} g \cos \gamma \sin \alpha \frac{t^2}{2}$. Pro $t = 1$ s v případě b) $s = 0,87$ m, v případě a) $s = 1,6$ m (pokládáme $\gamma = 0$).

Pro výpočet síly $\vec{F}$ orientujeme kladný směr osy z naší souřadné soustavy kolmo k nakloněné rovině vzhůru, kladný směr osy x ve směru spádové přímky dolů. Cel-

ková síla $\vec{F} + \vec{G}$, kde $\vec{G} = Mg(\sin \alpha, 0, -\cos \alpha)$, je váha válce, se rovná $M \cdot \vec{a}_T$, kde $\vec{a}_T = R\varphi(\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$ je zrychlení těžiště. Z toho

$$\vec{F} = M\vec{a}_T - \vec{G} = Mg \left(\left[\frac{2}{3} \cos^2 \gamma - 1 \right] \sin \alpha, \frac{2}{3} \cos \gamma \sin \gamma \sin \alpha, \cos \alpha \right)$$

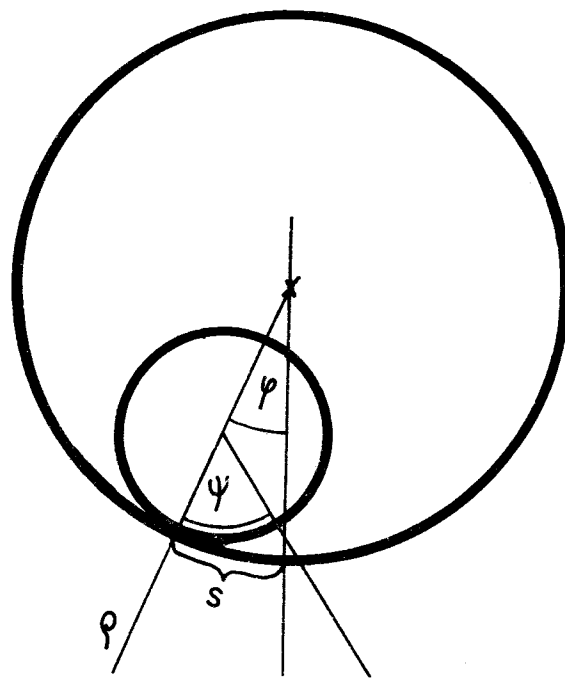
Číselně

$$a) \vec{F} = 98,1 \text{ N} \cdot \left(-\frac{1}{6}, 0, \frac{3}{2} \right) = (16 \text{ N}; 0; 85 \text{ N})$$

$$b) \vec{F} = 98,1 \text{ N} \cdot \left(-\frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{2} \right) = (41 \text{ N}; 14 \text{ N}; 85 \text{ N})$$

5. Homogenní váleček o poloměru $r = 0,1 \text{ m}$ a o hmotě M kývá bez klouzání ve válcové dutině s vodorovnou osou o poloměru $R = 0,25 \text{ m}$. Stanovte dobu kyvu pro malé rozkyvy.

Řešení: (viz obr. 7,1). Při výchylce válečku z rovnovážné polohy nechť se odvalí obluk délky s . Rovina φ , proložená osami obou válců, svírá pak se svislou rovinou úhel $\varphi = \frac{s}{R}$. Váleček je přitom vůči rovině φ pootočen o úhel $\psi = \frac{s}{r}$ v opačném směru, váleček je tedy celkem pootočen o $\psi - \varphi$. Jeho potenciální energie je $-Mg(R-r)\cos\varphi - \text{konst}$, kinetická energie $\frac{1}{2} J (\dot{\psi} - \dot{\varphi})^2 =$



obr. 7,1

$= \frac{J}{2} \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 \dot{\varphi}^2$, kde J je moment setrvačnosti vzhledem k povrchové přímce $J = \frac{3}{2} Mr^2$. Rovnice zachování energie $\frac{J}{2} \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 \dot{\varphi}^2 - Mg(R-r)\cos\varphi = \text{konst}$ má pro $\cos\varphi \sim 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ řešení tvaru $\varphi = A \sin \omega t$, je-li $\frac{J}{2} \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 \omega^2 = Mg(R-r) \cdot \frac{1}{2}$, tedy doba kyvu $T/2 = \pi/\omega = \pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}} = 0,48 \text{ s}$.

6. Homogenní sferoid (elipsoid o loosách $a, b = c$) je umístěn v poli slapových sil dle řešeního příkladu 2. z kapitoly 5. Uživeme-li souřadné soustavy z zmíněného příkladu, leží střed sferoidu v počátku. Úhel sevřený osou jeho rotační symetrie a vektorem $\vec{r}_{zs}$ označme φ .

a) Jaký silový moment působí na sferoid?

b) Nechť jsou slapové síly vyvolány koulí o hmotě $M_s \gg M$ (M je hmota sferoidu), kolem níž sferoid obíhá v rovině φ rovnoměrně v konstantní vzdálenosti r_{zs} . Předpokládejte, že rotační pohyb sferoidu probíhá pouze v rovině φ , osa rotační symetrie sferoidu leží stále v této rovině. V jakých polohách sferoidu může zůstat úhel φ konstantní? Které z nich jsou stabilní? Vypočítejte periodu malých kyvů kolem stabilních poloh.

Řešení:

a) Na hmotný element o hmotě dm a souřadnicích x, y, z působí síla $dm \cdot \mathcal{M}_s r_{zs}^{-3} \cdot (2x, -y, -z)$; moment tedy dle definice

$$\vec{D} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \int (x, y, z) \times (2x, -y, -z) \cdot \frac{\mathcal{M}_s}{r_{zs}^3} dm = \frac{3\mathcal{M}_s}{r_{zs}^3} (0, \int xz dm, -\int yz dm)$$

Integrály v posledním výrazu, vztažené přes celý objem sferoidu, jsou známy jako deviační momenty setrvačnosti: $\vec{D} = 3\mathcal{M}_s r_{zs}^{-3} \cdot (0, -J_{xz}, J_{xy})$. Bez újmy na obecnosti lze osu rotační symetrie sferoidu položit do roviny xy . Pak $J_{xz} = 0$ a deviační moment J_{xy} lze vzít z výsledku úlohy 33. Jediná nenulová složka $\vec{D}$ je tedy, značíme-li hmotu sferoidu M ,

$$D_z = 3\mathcal{M}_s r_{zs}^{-3} \cdot \frac{M}{5} (b^2 - a^2) \sin\varphi \cos\varphi.$$

b) Rovinu xy lze ztotožnit s rovinou φ . Nechť je χ úhel, opsaný v rovině φ vektorem $\vec{r}_{zs}$ za čas t vzhledem k pevnému směru v inerciální souřadné soustavě. pak je úhel opsaný osou rotační symetrie sferoidu $\chi + \varphi$ a úhlové zrychlení sferoidu $\ddot{\chi} + \ddot{\varphi}$. Přitom $\ddot{\chi} = 0$ (oběh je rovnoměrný), pohybová rovnice pro rotaci sferoidu kolem osy z tedy dává

$$J_{zz} \ddot{\varphi} = D_z = 3\mathcal{M}_s r_{zs}^{-3} \cdot \frac{M}{5} (b^2 - a^2) \sin\varphi \cos\varphi,$$

kde $J_{zz} = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2)$ je moment setrvačnosti sferoidu kolem osy z . Řešení rovnice tvaru $\varphi = \text{konst}$. jsou $\varphi = 0, \pi/2$ (další dvě, $\varphi = \pi, 3\pi/2$, nedají fyzikálně nic nového). Pro $a > b$ je stabilní pouze první poloha. Při malých výchylkách z polohy $\varphi = 0$ lze psát $\sin\varphi \sim \varphi, \cos\varphi \sim 1$, tedy pohybová rovnice

$$J_{zz} \ddot{\varphi} = -3\mathcal{M}_s r_{zs}^{-3} \cdot \frac{M}{5} (a^2 - b^2) \varphi$$

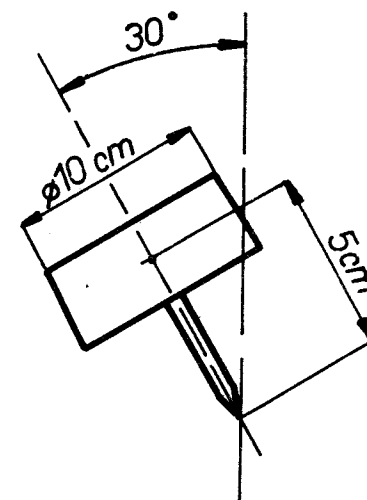
To je rovnice pro harmonické kmity, sferoid tedy kývá kolem polohy $\varphi = 0$ s periodou (po dosazení za J_{zz}) $T = 2\pi \sqrt{\frac{r_{zs}^3}{3\mathcal{M}_s} \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}}$

Poznámka. Podobné kyvy například vykonává v důsledku svého nepatrně protáhlého tvaru Měsíc v poli slapových sil Země - tzv. fyzická librace. Jejich amplituda je však velmi malá v porovnání s librací optickou, což je zdánlivé kývání Měsíce, způsobené jinými příčinami: pohybem pozorovatele (v důsledku zemské rotace), nerovnoměrností oběhu Měsíce kolem Země (zatímco jeho rotace je rovnoměrná) a sklonem osy jeho rotace vzhledem k rovině jeho oběžné dráhy kolem Země.

7. Těžký setrvačník, tvořený homogenním válcem o průměru $2R = 10 \text{ cm}$ a o hmotě $M = 2 \text{ kg}$ je podepřen v ose ve vzdálenosti $h = 5 \text{ cm}$ pod těžištěm (obr. 7,2). Osa je odchýlena od svislého směru o $\psi = 30^\circ$, setrvačník koná 30 otáček za vteřinu ($\omega/2\pi$). Za předpokladu, že setrvačník koná pomalou regulární precesi, určete její rychlost.

Řešení:

Zanedbáme-li úhlovou rychlost precese, má moment hybnosti setrvačníku velikost $J\omega$ ($J = \frac{1}{2} MR^2$) a směr osy. Jeho vodorovná složka (velikost $J\omega \sin\psi$) se při precesi otáčí kolem svislé osy s úhlovou rychlostí precese Ω . Časová derivace vektoru momentu hybnosti má tedy vodorovný směr kolmý k ose setrvačníku, velikost $\Omega \cdot J\omega \sin\psi$ a rov-



obr. 7,2

ná se přitom momentu $\vec{D}_T$ síly tíže $\vec{G}$ vzhledem k bodu, kde je setrvačnick podpřen

$$\Omega \cdot J\omega \sin \psi = D_T = Gh \sin \psi$$

$$\text{Tedy } \Omega = \frac{Gh}{J\omega} = \frac{2gh}{R^2\omega} \doteq 2,1 \text{ rad/s}$$

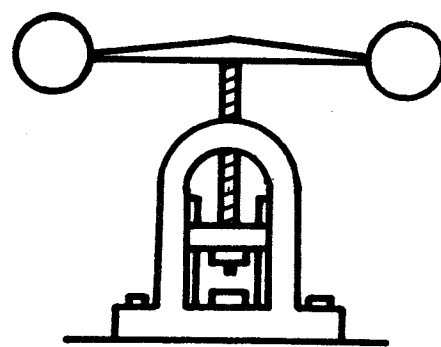
8. Těleso je upevněno v Cardanově závěsu. Cardanův závěs se skládá z rámečku, otočného okolo osy O_1 , ve kterém je těleso samo upevněno otočně okolo osy O_2 . Osy O_1, O_2 jsou dvě na sebe kolmé různoběžky. Rámeček se otáčí rovnoměrně s úhlovou rychlostí ω_1 , těleso se vůči rámečku otáčí rovněž rovnoměrně s rychlostí ω_2 . Jaká je úhlová rychlost tělesa T? Určete herpolhodiový a polhodiový kužel pro jeho pohyb.

Řešení:

S rámečkem spojíme souřadnou soustavu $x'y'z'$; osa x' nechť splývá s osou O_1 , osa y' s osou O_2 . Celková úhlová rychlost tělesa (vůči vztažné soustavě v klidu) má v čárkované soustavě složky $(\omega_1, \omega_2, 0)$. Otáčí se tedy spolu s čárkovanou soustavou okolo osy O_1 . Pohybuje se přitom po rotačním kuželi s osou O_1 , vrcholem $(0, 0, 0)$ a úhlem při vrcholu, sevřeným osou kužele a površkou, $\arctg \frac{\omega_2}{\omega_1}$. To je herpolhodiový kužel. Polhodiový kužel vytíná vektor úhlové rychlosti na uvažovaném tělese. Je to opět rotační kužel s osou O_2 , vrcholem $(0, 0, 0)$ a úhlem při vrcholu $\frac{\omega_1}{\omega_2}$.

Úlohy

1. Vypočtete momenty setrvačnosti kolem os x, y, z pro homogenní eliptický válec $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, |z| \leq c$
2. Vypočtete momenty setrvačnosti kolem os x, y, z pro trojosý homogenní elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$
3. Homogenní kouli o středu S a poloměru R rozřízneme rovinou, procházející bodem S , na dvě polokoule. Stanovte moment setrvačnosti jedné z polokoulí vzhledem k ose o procházející bodem S .
4. Vypočtete moment setrvačnosti rotačního kužele $x^2 + y^2 \leq R^2 z^2 / v^2, 0 \leq z \leq v$ kolem osy symetrie z (J_{zz}).
5. Vypočtete moment setrvačnosti kužele z příkladu 4. kolem osy kolmé k ose symetrie, procházející a) vrcholem kužele (např. osa y), b) těžištěm kužele.
6. Ukažte, že deviační momenty setrvačnosti kužele z úlohy 4 vzhledem k osám z, y, x jsou nulové. Ukažte dále totéž i pro tělesa z úloh 1 - 3.
7. Vypočtete moment setrvačnosti kužele z úlohy 4. kolem povrchové přímky.
8. Stanovte moment setrvačnosti lana svinutého podle obr. 6,9 v úloze 8. z kap. 6 vzhledem k ose procházející středem kruhového oblouku kolmo k nákrešně. Hmota délkové jednotky lana je μ .
9. Okov hmoty $m = 10 \text{ kg}$ je zavěšen ve velmi hluboké studni na provaze délky $\ell = 30 \text{ m}$, z něhož $\ell - \ell_1 = 25 \text{ m}$ je navinuto na vodorovné válcové hřídeli z homogenního materiálu. Hmota hřídele je $M_H = 40 \text{ kg}$, průměr $2R = 0,2 \text{ m}$. Klíky připevněné souměrně proti sobě ke koncům hřídele mají celkový moment setrvačnosti $J_K = 1 \text{ kg m}^2$. Jak dlouhou dobu τ bude trvat, než se provaz zcela rozvine, je-li na počátku hřídel v klidu? Hmotu provazu a tření zanedbejte.
10. Vyřešte předchozí příklad, je-li zde místo provazu homogenní řetěz těžký $g\mu\ell = 15 \text{ kp}$ (μ je hmota jednotky délky řetězu, jeho články jsou dostatečně jemné a tloušťka malá v porovnání s poloměrem hřídele). Konec řetězu je v hřídeli zapuštěn tak, že na průřezu hřídeli má tvar podle obr. 6,9 k úloze 8 z kap. 6 (přitom $d = R\sqrt{\frac{5-1}{2}}$). Zapuštěný konec řetězu není započítán ani v délkách ℓ_1, ℓ , ani ve váze 15 kp .
11. Motor, pohánějící čerpadlo, má výkon a) 1 kW , b) 1 ks . Počet otáček za minutu je 2800. Jakým silovým momentem D je zkrucována spojovací hřídel?



obr. 7,3

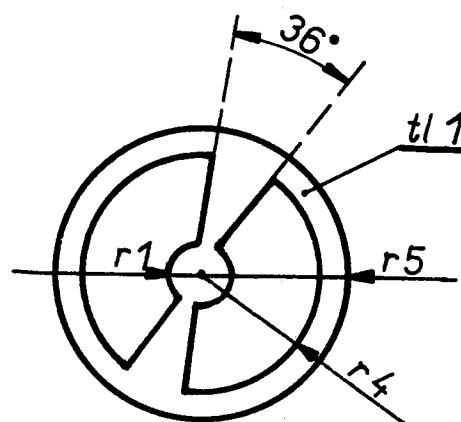
12. Šroub lisu (obr. 7,3) je opatřen čtyřmi meny, z nichž každé nese železnou kouli o hmotě $M = 15 \text{ kg}$. Střed koulí mají vzdálenost od osy $r = 50 \text{ cm}$ (hustota železa $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$).

a) Vypočítejte kinetickou energii, roztočí-li se šroub rychlostí 1 otáčky za vteřinu. (Uvažujte pouze rotační pohyb koule, energii ostatních součástí a translaci ve směru osy zanedbejte.)

b) Tváření výrobku probíhalo po délce $s = 5 \text{ mm}$ posuvu až do úplného zastavení šroubu. Byla-li potřebná síla přibližně podél celé dráhy konstantní, vypočítejte její velikost.

13. Kosmická kabina se otáčí kolem své hlavní osy setrvačností O , vzhledem k ní má moment setrvačnosti $J = 20\,000 \text{ kgm}^2$, rychlostí 1 otáčka za 20 vteřin. K dispozici jsou dva raketové motory, působící v opačných směrech ve dvou noběžných přímkách p_1, p_2 , přičemž rovina těchto přímek je kolmá k O a její vzdálenost 4 m. Jak dlouho musí být motory spuštěny, aby se rotace zastavila, je-li tah každého z nich 10 kp.

14. Vypočítejte dobu kyvu vahadla v Cavendishově pokusu v úloze 10 z kap. 5. po stranění koulí K_1', K_2' .



obr. 7,4

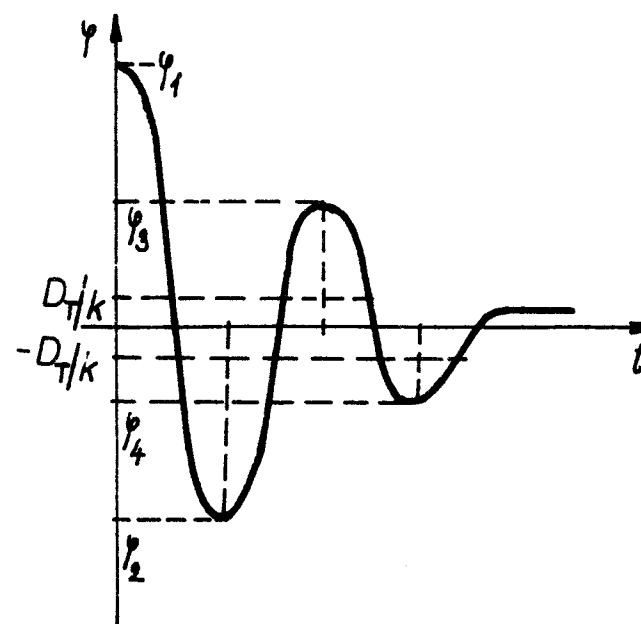
15. Setrvačka v hodinkách má tvar dle obr. 7. Vykoná za vteřinu 5 kyvů. Vypočítejte direkt moment vlásku (konstantu úměrnosti k mezi silovým momentem D a otočením φ), zanedbá-li se tření v ložiskách a moment setrvačnosti hřídele a ostatních s ním spojených součástí. Hustota materiálu je $8,4 \text{ g/cm}^3$, tloušťka setrvačky 1 mm (ostatní rozměry rovněž v milimetrech).

16. Tření v ložiskách v minulém případě vyvolává na rychlosti nezávislý silový moment $D_T = 0,26 \cdot 10^{-6} \text{ Nm}$ působící proti směru pohybu. Setrvačka je vypuštěna s nulovou (úhlovou) rychlostí s počáteční výchylkou

$\varphi_1 = 90^\circ$. Vyšetřete její pohyb; kolik kyvů vykoná? V jaké poloze se zastaví?

17. Synchronní motorek na střídavý proud (frekvence $f = 50 \text{ Hz}$) je nakreslen na obr. 7,6. Přitažlivá síla elektromagnetu je největší v okamžiku, kdy střídavý proud, napájející elektromagnet, dosahuje maximální hodnoty. V každé půlperiodě se v tomto okamžiku k pólu přibližuje vždy další zub rotoru a je přitažen. Takto vzniklá síla překonává odpor zátěže s konstantním brzdícím silovým momentem $D = 10^{-2} \text{ Nm}$. Odhadněte, jak veliký moment setrvačnosti musí mít rotor spolu se zátěží a případným setrvačníkem, aby nerovnoměrnost chodu nepřesáhla hodnotu 1 : 50. Počet zubů rotoru $N = 10$.

Poznámka. Nerovnoměrnost chodu se rozumí podíl $(\omega_{\max} - \omega_{\min})/\omega_s$, kde

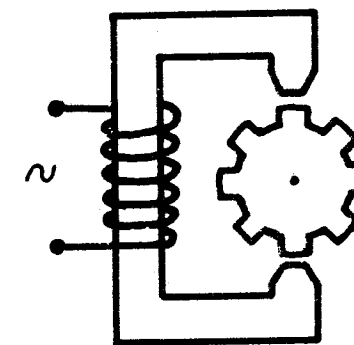


obr. 7,5

$\omega_{\max}$ je maximální, $\omega_{\min}$ minimální (okamžitá) úhlová rychlost a $\omega_s = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}$.

Pokyn. Pro odhad uvažujte extrémní případ, kdy síla působí v každé půlperiodě jen v jediném (velmi krátkém) časovém okamžiku.

18. Talíř gramofonu je poháněn motorkem přes pružný převod, takže liší-li se úhly otočení talíře φ_T a hřídele motorku φ_M , působí na talíř silový moment $-k(\varphi_T - \varphi_M)$, kde $k = 5 \text{ Nm}$. Úhlová rychlost hřídele motorku kolísá s periodou n -krát kratší ($n = 66,6$) než je doba otočení hřídele. Předpokládáme, že kolísání má sinusový průběh $\omega = \omega_s (1 + \frac{1}{2} \sin n \omega_s t)$, přičemž nerovnoměrnost chodu $\nu = 1:50$ a střední úhlová rychlost $\omega_s = 2\pi \cdot 0,75 \text{ s}^{-1}$. Moment setrvačnosti talíře je $J = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$. Jak velká bude nerovnoměrnost jeho otáčení?



obr. 7,6

19. Přes kladku o poloměru R a momentu setrvačnosti J je přenášeno lano délky ℓ s hmotou μ na délkovou jednotku. Část lana o délce ℓ_1 visí s kladky na jednu stranu, část o délce $\ell_2 = \ell - \pi R - \ell_1$ na druhou. Jak velkou počáteční rychlost je třeba udělit lanu s kladkou, aby přepadlo

- na jednu stranu,
- na druhou stranu.

Je možný ještě nějaký další případ? Předpokládejte, že lano po kladce neklouže a přiléhá k celé polovině obvodu kladky.

20. Obdélníková cívka galvanometru s rozměry $a = 12 \text{ mm}$, $b = 8 \text{ mm}$ o hmotě $m = 75 \text{ mg}$ je uprostřed své kratší strany zavěšena na torzním vlákně, které při otočení cívky o φ radiánů ji vrací zpět momentem $k\varphi$, $k = 3,5 \cdot 10^{-9} \text{ J/rad}$.

Stanovte dobu kyvu cívky. Příčné rozměry vinutí i rámečku cívky jsou po celém obvodu stejné a lze je v porovnání s a, b zanedbat.

21. Galvanometr z minulého příkladu opatříme tlumením, přičemž brzdný moment B úměrný rychlosti ($B = -b\dot{\varphi}$). Dva po sobě následující výkyvy mají amplitudy v poměru 1:20. Vypočítejte konstantu b a novou dobu kyvu.

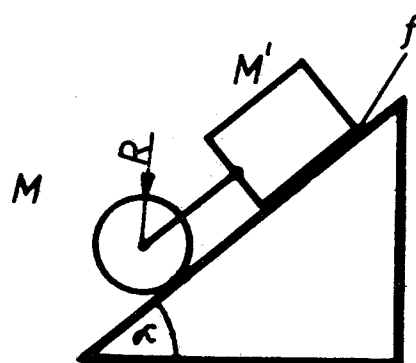
22. Jakou rychlostí dopadne na zem při kácení dvacetimetrového stromu jeho špička? Strom pokládejte za homogenní kužel; jeho příčné rozměry jsou zanedbatelné. Dolní konec stromu zůstává zapřen, takže nemění svou polohu.

23. Válec k válcování hříště o poloměru $R = 0,3$ m a hmotě $M = 0,5$ t se valí rychlostí $v_0 = 3,6$ km/hod. Jak dlouho je třeba táhnout vodorovným směrem silou $F = 10$ kp za držadlo, spojené s osou válce, aby se zastavil? Jaká síla H potom působí vodorovným směrem mezi válcem a zemí?

24. Na homogenní válec poloměru R a hmoty M ležící v klidu na hladké podložce, působí vodorovným směrem síla F . Jak vysoko (d) nad těžištěm válce musí ležet přímka jejího působení, má-li se válec valit bez klouzání?

25. Stanovte zrychlení, s kterým sjíždí s nakloněné roviny se sklonem α ve směru spádové přímky čtyřkolový vozík. Celková hmoty (včetně kol) vozíku je M , poloměr každého kola je R , jeho moment setrvačnosti J .

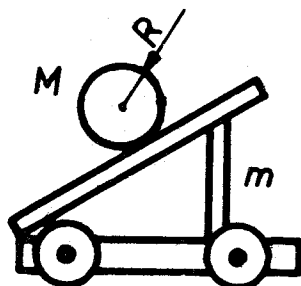
26. Po nakloněné rovině se sklonem α (viz obr. 7,7) sjíždí bez klouzání válec



obr. 7,7

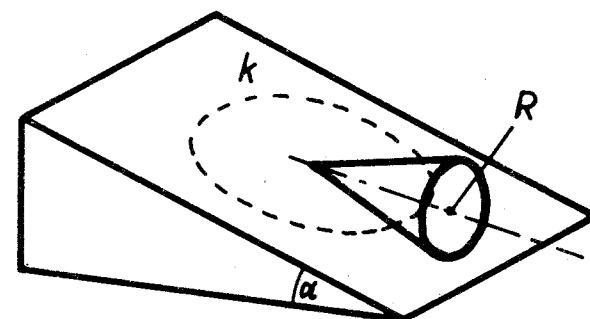
27. Koule o hmotě M a poloměru R se valí na lize po hranách dvou rovnoběžných trámů; vzdálenost hran je R . Sklon líhy je $\alpha = 30^\circ$; jakou dráhu urazí koule za čas $t = 1$ sec?

28. Šikmá drsná deska je připevněna k vozíku tak, že se může bez tření pohybovat ve vodorovném směru kolmo k vrstevnicím (obr. 7,8). Celková hmoty desky s vozíkem je m . Na desku je položen homogenní válec hmoty M a poloměru R tak, že se roviny dotýká podél vrstevnice. Vyšetřete pohyb vozíku.



obr. 7,8

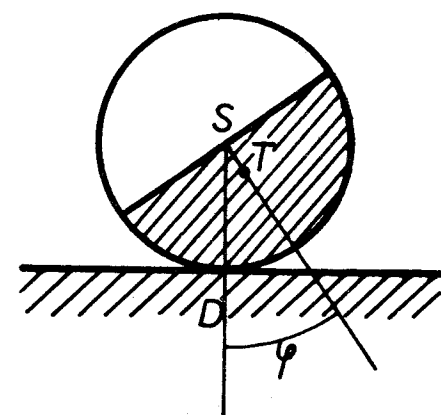
29. Homogenní kužel výšky v s poloměrem základny R , jehož hmoty je M , se může valit bez klouzání po nakloněné rovině se sklonem α (obr.



obr. 7,9

7,9). Stanovte frekvenci jeho malých kyvů kolem (stabilní) rovnovážné polohy. (Srovnajte úlohu 7.)

30. Vypočítejte, s jakou dobou kyvu kývá kolem své rovnovážné stabilní polohy koule poloměru $R = 2$ cm, položená na rovnou drsnou pevnou podložku. Koule se skládá ze dvou polokoulí, z nichž jedna je z olova (hustota $\rho_1 = 11,3$ g/cm³), druhá z cínu ($\rho_2 = 7,2$ g/cm³). Kývání se děje v jedné (svislé) rovině; omezte se na malé rozkyvy. (Srovn. úlohu 7 z kapitoly 6 a úlohu 3).

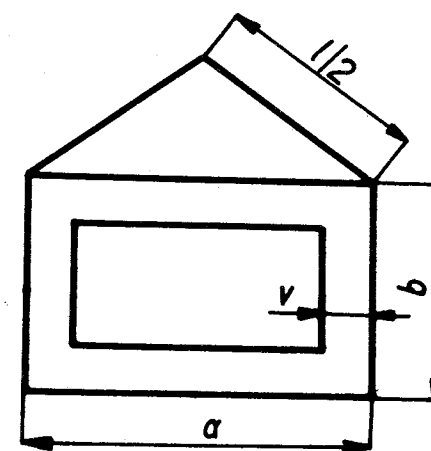


obr. 7,10

31. Na stěně je na hřebíku zavěšen na šířku na lanku rámeček o vnějších rozměrech $a = 40$ cm, $b = 20$ cm a hmotě $M = 0,1$ kg vyrobený z lačky o šířce $v = 3$ cm s obdélníkovým průřezem (obr. 7,11). Délka závěsného lanka je $\ell = 50$ cm. Vypočítejte dobu kyvu, kývá-li rámeček rovnoběžně se stěnou s malými rozkyvy.

32. Lze v předchozím příkladě změnou délky závěsného lanka zkrátit dobu kyvu? Lze-li, do jaké míry?

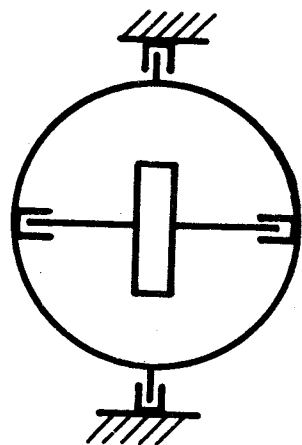
33. V kartézském souřadném systému je dán homogenní sferoid (elipsoid, jehož dvě poloosy jsou stejně dlouhé, např. $b = c$) se středem $(0, 0, 0)$. Osa rotační symetrie sferoidu (osa a) má směr vektoru $\vec{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$. Najděte deviační moment setrvačnosti J_{xy} .



obr. 7,11

34. Odhadněte úhlovou rychlost precese zemské osy, způsobenou slapovými silami Slunce, v době slunovratu. Precesi považujte za regulární. Zemi pokládejte za homogenní zploštělý sferoid s poloosami $a = 6357$ km, $b = c = 6378$ km. Návod: všimněte si řešených úloh 6, 7.

35. Podstatou gyrokompasu je setrvačník s vodorovnou osou uložený v rámečku, kte-



obr. 7, 12

rý se může otáčet pouze kolem svislé osy (obr. 7,12). V důsledku zemské rotace působí na setrvačník silové momenty, které ho stáčí do směru poledníku.

Předpokládejme, že takto uložený setrvačník tvaru homogenního válce s poloměrem $R = 5 \text{ cm}$ a hmotou $M = 2 \text{ kg}$ rotuje rychlostí 300 obrátek za sec. ($\omega/2\pi$). Je umístěn na rovníku tak, že jeho osa směřuje od východu k západu. Stanovte jednak silový moment, který stáčí rámeček, jednak silový moment, který zachycují ložiska nesoucí rámeček se setrvačníkem. Výpočet proveďte

a) v případě, že se rámeček neotáčí kolem svislé osy,

b) v případě, že se rámeček otáčí kolem svislé osy úhlovou rychlostí $\Omega_1 = 2\pi/(10 \text{ s})$.

36. Vyšetřete pohyb setrvačníku, jehož jeden bod U ležící na ose setrvačníku je pevný. Setrvačník rotuje rovnoměrně kolem své osy úhlovou rychlostí ω , přičemž jeho osa koná regulární precesi kolem pevného směru rychlostí Ω . Stanovte přesně, tj. bez zanedbání precesní úhlové rychlosti

a) moment hybnosti vzhledem k bodu U ,

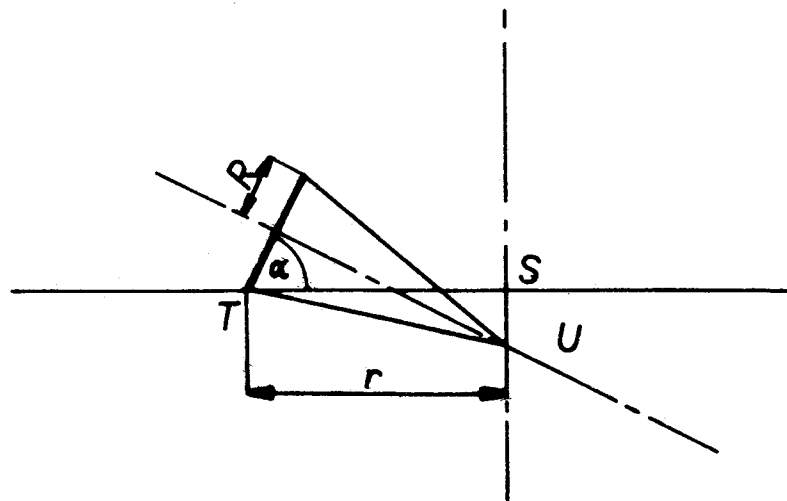
b) moment sil vzhledem k bodu U , které uvedený pohyb vyvolávají.

37. Homogenní kužel o poloměru základny $R = 5 \text{ cm}$ a s výškou $v = 6 \text{ cm}$ rotuje jako setrvačník s podepřeným vrcholem v poli tíže. Jeho osa je odchýlena od svislého směru o 30° a koná regulární precesi úhlovou rychlostí $\Omega = 2 \text{ rad/s}$. Jakou rychlostí setrvačník rotuje? Výpočet proveďte

a) jako v řešeném příkladu 7,

b) přesně dle výsledku minulé úlohy.

38. Plochý homogenní kruhový disk poloměru $R = 2 \text{ cm}$ o hmotě M se valí bez klouzání konstantní rychlostí po rovné podložce tak, že dotykový bod T opisuje kruž-



obr. 7, 13

nici k o poloměru $r = 10 \text{ cm}$ se středem S (obr. 7,13). Rovina disku svírá s podložkou konstantní úhel $\alpha = 60^\circ$. Určete herpolhoidový a polhoidový kužel.

39. Jak velikou rychlostí v probíhá bod T v minulém příkladě kružnicí k ?

40. Uvažme nyní případ, kdy disk probíhá tutéž dráhu jako v úloze 36 (úhel α zůstává týž), ale místo valení disk klouže bez tření po kružnici k tak, že se roviny dotýká stále stejným svým bodem. Jelikož mezi rovinou a diskem není tření, musí být disk po kružnici nějakým způsobem veden, například drážkou. Dále tutéž situaci řešte ještě za předpokladu, že hmota disku není rozložena rovnoměrně po celé jeho ploše, ale je soustředěna v jeho středu. (Nezáleží pak na tom, valí-li se disk či klouzá.)

8. Pružnost a základy reologie

Řešené příklady

1. Pro pět vyšetřovaných vzorků byly zjištěny následující vztahy mezi napětím τ , deformací e a případně i rychlostí deformace D . V posledních řádcích uvedených tabulek jsou uvedeny hodnoty veličin po odtižení vzorků.

a)

$\tau (10^5 \text{ N/m}^2)$	e
1	$0,5 \cdot 10^{-6}$
20	10^{-5}
200	10^{-4}
2000	10^{-3}
0	0

b)

$\tau (10^5 \text{ N/m}^2)$	e
1	10^{-6}
20	$2,5 \cdot 10^{-5}$
200	$3,5 \cdot 10^{-4}$
0	0

c) Při prvním pokusu, který byl prováděn až do $\tau = 2 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$, byly zjištěny hodnoty

$\tau (10^5 \text{ N/m}^2)$	e
1	$0,5 \cdot 10^{-6}$
20	10^{-5}
200	10^{-4}
0	0

Při druhém pokusu, který byl prováděn do vyšších hodnot napětí, byla získána tabulka hodnot

$\tau (10^5 \text{ N/m}^2)$	e
1	$0,5 \cdot 10^{-6}$
200	10^{-4}
1000	$6 \cdot 10^{-4}$
1200	$8 \cdot 10^{-4}$
1450	$9 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 10^{-3} *$
0	$2 \cdot 10^{-3}$

*) Po dosažení hodnoty $\tau = 1450 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ začal vzorek přibližně konstantní rychlostí zvětšovat svou délku, až do okamžiku, kdy byla síla působící deformaci odstraněna. Tomuto okamžiku odpovídá hodnota deformace $e = 3 \cdot 10^{-3}$.

d)

$\tau (\text{N/m}^2)$	$D (\text{s}^{-1})$
1	10^3
5	$5 \cdot 10^3$
10	10^4
0	0

e)

$\tau (10^3 \text{ N/m}^2)$	$e_1 *$	$e_2 *$
1	$9 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}
5	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
10	$9 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}
20	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$

*) Symbolem e_1 je značena deformace po 10 s, symbolem e_2 deformace po 60 s.

Určete o jaký druh látek (podle reologického chování) se jedná.

Řešení:

a) Deformace je úměrná napětí a po odstranění napětí vymizí. Jedná se o ideálně elastickou látku s modulem pružnosti v tahu $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$.

b) Deformace látky není úměrná napětí, po vymizení napětí deformace vymizí. Jedná se o nelineárně elastickou látku.

c) Při malých napětích se látka chová elasticky. Po překročení jistého mezního napětí začne téci a po odtižení deformace nevymizí. Jedná se o plastickou látku.

d) Rychlost deformace D je úměrná napětí. Jedná se o Newtonskou viskózní kapalinu. Jelikož nebyly přesněji definovány deformace a napětí, je možno zde napětí τ pokládat za smykové a obdobně $D = \frac{de}{dt} = \frac{dv}{dx}$ pokládat za smykovou deformaci. Směr x je kolmý ke směru rychlosti $\vec{v}$ a v je velikost rychlosti.

e) Deformace je úměrná napětí, ale je časově závislá. Jedná se o lineární viskoelastickou látku. Pro viskoelastickou látku není podstatné, jestli po odtižení je deformace nulová nebo není, proto v tabulce poslední řádka s údajem pro $\tau = 0$ chybí.

2. Určete hlavní směry tenzoru napětí a velikosti hlavních napětí, jsou-li dány složky tenzoru napětí $\tau_{11} = 0$, $\tau_{12} = \tau_{21} = 0$, $\tau_{13} = \tau_{31} = 10^8 \text{ N/m}^2$, $\tau_{22} = 0$, $\tau_{23} = \tau_{32} = 10^8 \text{ N/m}^2$ a $\tau_{33} = 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$.

Řešení:

Napětí na rovině kolmé k hlavnímu směru tenzoru napětí nemá smykovou složku. Odtud plyne známá podmínka $\tau_{ij} \nu_j = \tau \nu_i$, v které τ značí velikost hlavního napětí a ν_i jednotkový vektor v hlavním směru tenzoru. Rozepsáním podmínky dostáváme rovnice

$$\tau_{11} \nu_1 + \tau_{12} \nu_2 + \tau_{13} \nu_3 = \tau \nu_1$$

$$\tau_{21} \nu_1 + \tau_{22} \nu_2 + \tau_{23} \nu_3 = \tau \nu_2$$

$$\tau_{31} \nu_1 + \tau_{32} \nu_2 + \tau_{33} \nu_3 = \tau \nu_3$$

Po dosazení zadaných hodnot (zvolíme 10^8 N/m^2 za jednotku) a anulování přejde tato soustava rovnic na tvar

$$\begin{aligned} -\tau \nu_1 + \nu_3 &= 0 \\ -\tau \nu_2 + \nu_3 &= 0 \\ \nu_1 + \nu_2 + (2 - \tau) \nu_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Aby tato homogenní soustava rovnic měla pro ν_1, ν_2, ν_3 nenulové řešení, je třeba, aby determinant soustavy byl roven nule, tj.

$$\begin{vmatrix} -\tau & 0 & 1 \\ 0 & -\tau & 1 \\ 1 & 1 & 2-\tau \end{vmatrix} = \tau(2\tau - \tau^2 + 2) = 0 \quad (2)$$

Řešením rovnice (2) dostáváme tři kořeny $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1 + \sqrt{3}$, $\tau_3 = 1 - \sqrt{3}$, které udávají velikosti hlavních napětí. Po dosazení zvolené jednotky dostáváme pro ve-

likosti hlavních napětí $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 2,73 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ (tah), $\tau_3 = -0,73 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ (tlak).

Jednotkový vektor ve směru hlavních napětí odpovídající hodnotě τ_1 označíme $\vec{v}^I$. Z rovnice (1) pro něj dostáváme $v_1^I = 0$, $v_1^I + v_2^I = 0$ a z podmínky, že vektor $\vec{v}^I$ je jednotkový, $v_1^{I^2} + v_2^{I^2} = 1$. Odtud plynou hodnoty složek vektoru $\vec{v}^I$ ($1/\sqrt{2}$, $-1/\sqrt{2}$, 0). Při nenulových hodnotách τ plyne z prvních dvou rovnic $v_1 = v_2$ a z první rovnice $v_3 = \tau v_1$ (třetí rovnice série (1) je lineárně závislá podmínka, že vektor $\vec{v}_1$ je jednotkový, dává potom $2v_1^2 + \tau^2 v_1^2 = 1$, odkud lze spočítat v_1 a dosazením do rovnic $v_1 = v_2$ a $v_3 = \tau v_1$ i v_2 a v_3 . Po dosazení hodnot τ_2 dostáváme pro složky $\vec{v}^{II}$ ($1/\sqrt{6+2\sqrt{3}}$, $1/\sqrt{6+2\sqrt{3}}$, $(1+\sqrt{3})/\sqrt{6+2\sqrt{3}}$) a po dosazení hodnot τ_3 pro složky $\vec{v}^{III}$ ($1/\sqrt{6-2\sqrt{3}}$, $1/\sqrt{6-2\sqrt{3}}$, $(1-\sqrt{3})/\sqrt{6-2\sqrt{3}}$). Jednotkové vektory ve směru hlavních os tenzoru napětí $\vec{v}^I$, $\vec{v}^{II}$, $\vec{v}^{III}$ jsou uvedenými složkami jednoznačně určeny až na možný násobek skalárem -1. Přímým dosazením je možno zkontrolovat i podmínky vzájemné kolmosti vektorů $\vec{v}^I \cdot \vec{v}^{II} = \vec{v}^{II} \cdot \vec{v}^{III} = \vec{v}^I \cdot \vec{v}^{III} = 0$.

3. Obecný Hookův zákon pro izotropní těleso má tvar

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_I + 2\mu e_{ij}, \quad (1)$$

kde τ_{ij} jsou složky tenzoru deformace, δ_{ij} je Kroneckerův symbol ($\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$, $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = 0$), e_{ij} je tenzor malých deformací, $e_I = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ je první invariant tenzoru e_{ij} , konstanty λ a μ se nazývají Laméovy koeficienty. Tenzorová rovnice (1) reprezentuje soustavu šesti rovnic pro jednotlivé složky tenzorů, protože všechny v ní vystupující tenzory jsou symetrické, např. $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Vypočítejte z Laméových koeficientů modul pružnosti v tahu E a Poissonovo číslo σ . (Užíváme zde označení σ místo normou předepsaného μ , aby nedošlo k záměně s Laméovým koeficientem μ .)

Řešení:

Modul pružnosti v tahu E je definován jako poměr napětí τ k deformaci e při tahovém namáhání vzorku

$$\tau = E e \quad (2)$$

Proložíme-li směrem, ve kterém při tahu působí síla, osu x_1 kartézské soustavy souřadné, dostaneme namáhání, které je nazýváno tahem, když všechny složky tenzoru τ_{ij} s výjimkou τ_{11} položíme rovny nule.

Rozepíšeme-li rovnici (1) pro případ tahu, dostáváme

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{11} & 0 &= 2\mu e_{12} \\ 0 &= \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{22} & 0 &= 2\mu e_{13} \\ 0 &= \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{33} & 0 &= 2\mu e_{23} \end{aligned}$$

Z těchto rovnic plyne $e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0$,

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} e_{11} \quad (3)$$

$$\tau_{11} = \lambda(e_{11} - \frac{2\lambda}{2(\lambda + \mu)} e_{11}) + 2\mu e_{11} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} e_{11} \quad (4)$$

porovnáním (4) a (2), uvědomíme-li si, že τ a e z (2) odpovídají τ_{11} a e_{11} z (4), dostáváme pro modul pružnosti v tahu hledané vyjádření

$$E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu).$$

podle definice je Poissonovo číslo σ poměrem relativního příčného zkrácení k relativnímu prodloužení vzorku, což v naší symbolice můžeme zapsat, uvážíme-li, že obě ve zlomku se vyskytující veličiny jsou pokládány za kladné, jako $\sigma = |e_{22}/e_{11}|$. Z rovnice (3) potom dostaneme $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$.

Poznámka: Obdobně lze dokázat, že Laméův koeficient μ je roven modulu pružnosti ve smyku G .

4. Jak se prodlouží (ideálně) elastická tyč délky ℓ a hustoty ρ působením své vlastní váhy? Tyč je na svém horním konci upevněna tak, že míří svisle dolů. Modul pružnosti v tahu materiálu tyče je E .

Řešení:

Podél tyče proložíme osu x tak, aby kladný směr osy mířil proti směru tíže a počátek byl na spodním konci tyče. Váha tyče pod místem x bude $G = \rho g S x$ (S průřez tyče, g tíhové zrychlení) a způsobí v místě x napětí $\tau = \rho g x$. Z Hookova zákona dostáváme pro deformaci $e = \tau/E$. Celkové prodloužení tyče $\Delta \ell$ získáme integrací e podél délky tyče,

$$\Delta \ell = \int_0^\ell e \, dx = (\rho g/E) \int_0^\ell x \, dx = \rho g \ell^2 / 2 E.$$

Úlohy

- a) Jaké jsou hlavní směry tenzoru napětí τ_{ij} v případě smyku?

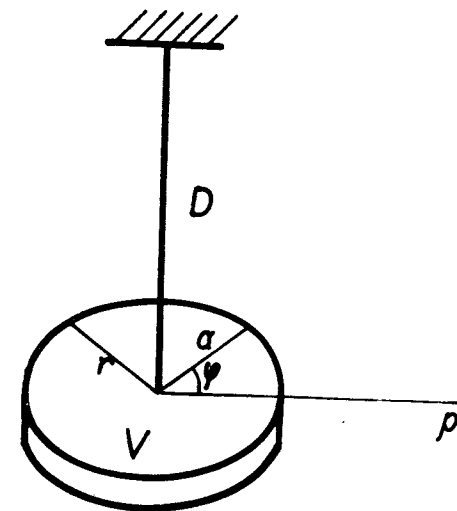
b) Jaké jsou hlavní směry tenzoru rychlosti deformace $D_{ij} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t}$ (ϵ_{ij} tenzor deformace, t čas), je-li rychlost kapaliny určena vektorem $\vec{v}(kx_2, 0, 0)$. Tok kapaliny s takto zadanou rychlostí $\vec{v}$ se uvažuje při elementárním odvození Newtonova zákona proudění viskózní kapaliny $\frac{dv_1}{dx_2} = \frac{1}{\eta} \tau_{12}$.
- V bodě tělesa jsou známy hodnoty složek tenzoru napětí $\tau_{11} = 500 \text{ N/m}^2$, $\tau_{22} = 0$, $\tau_{33} = -300 \text{ N/m}^2$, $\tau_{12} = 500 \text{ N/m}^2$, $\tau_{13} = 800 \text{ N/m}^2$ a $\tau_{23} = -750 \text{ N/m}^2$. Určete napětí působící na plošku, jejíž jednotkový vektor ve směru normály $\vec{n} = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$.
- Rovinnou deformaci máme určenu složkami tenzoru malých deformací $e_{11} = 5 \cdot 10^{-4}$, $e_{22} = -5 \cdot 10^{-4}$ a $e_{12} = (\sqrt{3}/2) \cdot 10^{-4}$. Určete směr, ve kterém nastane největší relativní prodloužení a velikost tohoto prodloužení.
- Jaký je geometrický význam invariantu $e_I = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ tenzoru malých deformací?
- Stanovte modul objemové pružnosti $K = -V_0 \frac{dp}{dV}$ elastické látky, jejíž elastické vlastnosti jsou určeny Laméovými koeficienty λ a μ . Ve výrazu pro K je V_0 objem uvažovaného množství látky při nulovém tlaku a V objem při tlaku p .
- Uvažujte nestlačitelnou látku, tj. takovou látku, pro kterou modul objemové pružnosti K definovaný v předcházející úloze je nekonečně velký. Určete
 - vztah mezi modulem pružnosti v tahu E a modulem pružnosti ve smyku G ,
 - hodnotu Poissonova čísla ν ,
 - zda je možno použít pro takovou látku Hookův zákon v tvaru $\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_I + 2\mu e_{ij}$. (Význam symbolů viz řešený příklad 3.)
- Kvádr rozměrů $\ell = 500 \text{ mm}$, $a = 10 \text{ mm}$, $b = 5 \text{ mm}$ je ve směru své nejdélejší hrany označené ℓ napínán silou $F = 500 \text{ kp}$. Určete prodloužení $\Delta \ell$, příčné zkrácení Δa a Δb a přírůstek objemu ΔV kváдру. Látka, z které je kvádr zhotoven, je ideálně elastická o modulu pružnosti v tahu $E = 22\,000 \text{ kp/mm}^2$ a modulu pružnosti ve smyku $G = 8\,300 \text{ kp/mm}^2$.
- Mějme elastickou tyč upevněnou tak, že její délka je stálá. Při teplotě t_1 je napětí v tyči nulové. Vypočítejte napětí v tyči při teplotě t_2 ze známých hodnot modulu pružnosti v tahu E a součinitele lineární teplotní závislosti α . Výsledku lze použít k nalezení přibližné hodnoty napětí ve svařovaných kolejnicích při teplotě t_2 , je-li známa teplota t_1 , při které byly kolejnice svařovány. Vypočítejte τ pro hodnoty $E = 22\,000 \text{ kp/mm}^2$, $t_1 = 20^\circ \text{ C}$, $t_2 = -25^\circ \text{ C}$, $\alpha = 1,15 \cdot 10^{-5} \text{ deg}^{-1}$.
- Torzi elastické tyče kruhového průřezu si můžeme představit jako vzájemné natáčení průřezů kolmých na osu válce, přičemž rovina průřezu zůstane zachována.

úhel, o který se vzájemně natočí dva průřezy vzdálené ve směru osy o jednotku délky, označíme α . Osu x_3 kartézské soustavy souřadné proložíte osou válce.

a) Ze předpokladu lineární elasticity, že deformace je malá, stanovte vektor posunutí $u_i(x_k)$, složky tenzoru deformace $\epsilon_{ij}(x_k)$ a tenzoru napětí $\tau_{ij}(x_k)$.

b) Určete vztah mezi úhlem φ vzájemného natočení vrchní a spodní podstavy válce a momentem síly M , který vyvolává torzi válce. Válec má poloměr R a délku ℓ .

- Válec V o hmotě $m = 2 \text{ kg}$, poloměru $r = 10 \text{ cm}$ zavěsíme ve směru osy na ocelový ($G = 8\,300 \text{ kp/mm}^2$) drát D délky $\ell = 1 \text{ m}$ a poloměru $R = 0,5 \text{ mm}$ (obr. 8,1). Spoj mezi drátem a válcem je pevný. Určete dobu kmitu T torzních kmitů válce, tj. kmitů kolem osy válce. Uspořádání znázorněné na obr. 8,1 bývá nazýváno torzním kyvadlem.



obr. 8,1

- O ideálně plastické látce víme, že začíná téci při smykovém napětí $\tau_0 = 100 \text{ kp/mm}^2$. Jakým největším momentem síly M_m můžeme torzně namáhat válec délky $\ell = 10 \text{ cm}$ a poloměru $R = 1 \text{ cm}$ zhotovený z této látky, aby v žádném bodě válce nepřekročilo smykové napětí mez plastického tečení.
- Mějme viskoelastickou látku, pro níž vztah mezi deformací e a napětím τ představujte si např. vzorek namáhaný tahem - je dán rovnicí $\tau = E e + \eta \frac{de}{dt}$ (E a η jsou konstanty). Je to diferenciální rovnice, která odpovídá Voigtovu viskoelastickému modelu. Na vzorek začne v čase $t = 0$ působit napětí stálé velikosti τ_0 (creep). Stanovte čas t_1 , v kterém deformace e_1 bude činit 90% mezní deformace e_m . Jeko mezní označujeme deformaci vzorku v čase $t \rightarrow \infty$. Číselně uvažujte případ, kdy $E = 3 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ a $\eta = 2 \cdot 10^7 \text{ Ns/m}^2$.

9. Mechanika tekutin

Řešené příklady

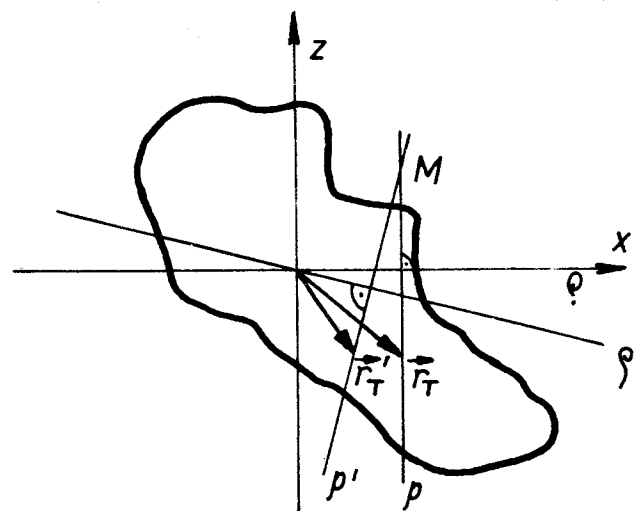
1. Jaký bude mít tvar v ustáleném stavu hladina kapaliny v nádobě, která se rovnoměrně otáčí kolem svislé osy úhlovou rychlostí ω ?

Řešení:

Vyšetřujeme-li systém v souřadné soustavě rotující spolu s nádobou, pak kromě gravitační síly s potenciálem $V_1 = gh$ působí na hmotu m ještě zdánlivá síla odstředivá (velikost $m\omega^2 r$) s potenciálem $V_2 = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2$, kde r je vzdálenost od osy. Pro tlak p ve statickém případě platí $p + \rho V_1 + \rho V_2 = \text{konst.}$, kde ρ je hustota kapaliny. Na hladině je tlak roven barometrickému tlaku, čili $V_1 + V_2$ je konstantní. Tedy $h = -\frac{\omega^2}{2g} r^2 + K$; povrch má tvar rotačního paraboloidu.

2. Na těleso plovoucí na hladině kapaliny působí vztlaková síla, jejíž výslednice leží v přímce p (vertikální). Mysleme si tuto přímku spojenou pevně s tělesem. Otočíme-li těleso okolo některé vodorovné osy o malý úhel α tak, aby byl ponoren stále stejný objem tělesa, dostaneme novou přímku p' . Pokud se obě přímky protínají, nazýváme jejich průsečík metacentrem. Poloha metacentra souvisí se stabilitou polohy tělesa; působí-li na těleso kromě vztlaku pouze gravitační síly, musí být v rovnovážné poloze metacentrum i těžiště v jediné vertikální přímce. Je-li metacentrum nad těžištěm, dávají při malém pootočení vztlaková síla a tíže dvojíci, jejíž moment vrací těleso do původní polohy - rovnováha je stabilní. Je-li těžiště nad metacentrem, je poloha labilní. Splývají-li, nelze o stabilitě nic říci bez bližšího rozboru. Tento mezní případ zde proto ze svých úvah vyloučíme.

Jak lze vypočítat polohu metacentra?



obr. 9,1

Řešení:

Vyznačíme-li si na tělese polohu hladiny před otočením a potom, protínají se tyto dvě roviny ρ, ρ' v přímce o . Osa y souřadné soustavy pevně spojené s tělesem nechť leží v této přímce, rovina xy leží v rovině ρ , osa z směřuje vzhůru (viz obr. 9,1). Rovina ρ' má pak rovnici $z = -x \tan \alpha \approx -x\alpha$. Změna ponoreného objemu ΔV při pootočení tělesa je dána vrstvou mezi oběma rovinami ρ, ρ' - její tloušťka $|x\alpha|$ se mění se souřadnicí x , její objem pro $x < 0$ se přičítá, pro $x > 0$ odebírá. Změny objemu se tedy získá integrací

$$\Delta V = \int_S -x \cdot \alpha \cdot dS = -\alpha \int_S x \cdot dS$$

přes plochu S , ve které protíná rovina ρ těleso. Musí být $\Delta V = 0$, tedy přímka o - osa y prochází těžištěm plochy S .

Přímka vztlakové síly prochází těžištěm ponoreného objemu tělesa, myslíme-li si jej vyplněný kapalinou (plyne ze Stevinovy úvahy při odvození Archimédova zákona). Před pootočením tělesa radiusvektor těžiště

$$\vec{r}_T = V^{-1} \int_V \vec{r} dV,$$

kde se integruje přes objem V omezený rovinou ρ , $V = \int_V dV$. Přímka p prochází bodem $\vec{r}_T$ a má směr osy z . Po pootočení se integrace provádí přes objem V' omezený rovinou ρ' ; platí $\int_{V'} dV = \int_V dV = V$ a

$$\vec{r}_T' = V^{-1} \int_{V'} \vec{r} dV = V^{-1} \int_V \vec{r} dV + V^{-1} \int_S \vec{r} \cdot (-x\alpha) \cdot dS = \vec{r}_T + \Delta \vec{r}_T,$$

kde příspěvek od vrstvy mezi rovinami ρ, ρ' lze psát $\Delta \vec{r}_T = -V^{-1} \alpha \left(\int_S x^2 dS, \int_S xy dS, 0 \right)$. Přímka p' prochází bodem $\vec{r}_T'$ a má směr kolmý k rovině ρ' - daný vektorem $(\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \sim (\alpha, 0, 1)$.

Jestliže vektor $\Delta \vec{r}_T$ má nenulovou y -ovou složku, leží přímky p, p' v různých rovnoběžných rovinách: $y = (\vec{r}_T)_y$ a $y = (\vec{r}_T')_y$, neprotínají se tedy. Je-li však osa y hlavní osou momentu setrvačnosti plochy S , je $\int_S xy dS = 0$ a obě přímky p, p' se protnou ve výšce h nad bodem $\vec{r}_T$, přičemž $h = V^{-1} \int_S x^2 dS$. Výška h metacentra M nad těžištěm ponořené části $\vec{r}_T$ je tedy vyjádřena momentem setrvačnosti plochy S kolem hlavní osy, procházející těžištěm plochy S . Pro výpočet stability se uvažuje hlavní osa, již přísluší minimální moment setrvačnosti - tj. nejmenší stabilita.

3. Rotační nádobu umístíme tak, aby její rotační osa měla směr tíže. Ve spodku nádoby uděláme malý otvor o ploše S_2 . Jaký musí být tvar nádoby (určíme jej jako závislost poloměru r nádoby na výšce nad otvorem h), aby hladina kapaliny v ní obsažené klesala se stálou rychlostí.

Řešení:

Bernoulliho rovnice dává vztah

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gh + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2$$

a rovnice kontinuity vztah

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

kde ρ je hustota kapaliny, g tíhové zrychlení, v_1 rychlost, h výška, p_1 tlak a S_1 průřez nádoby v hladině kapaliny, v_2 rychlost a p_2 tlak v místě otvoru o ploše S_2 . Nádobu uvažujeme otevřenou a rozdíl atmosférického tlaku mezi hladinou a otvorem zanedbáme, pak $p_1 = p_2$ a dostáváme

$$v_2^2 = \frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2} 2gh \approx 2gh \quad (1)$$

Přibližný vztah znamená zanedbání S_2^2 oproti S_1^2 ve jmenovateli přesného výrazu pro v_2^2 . Toto zanedbání, z kterého budeme dále vycházet, znamená, že odvozený výsledek nebude adekvátní pro malé výšky h .

Za čas dt vyteče otvorem objem kapaliny $dV = v_2 S_2 dt$. O tento objem se zmenší množství kapaliny v nádobě $-dV = \pi r^2 dh$. Porovnáním uvedených výrazů dostaneme

$$-\pi r^2 dh = v_2 S_2 dt \quad (2)$$

Neboli

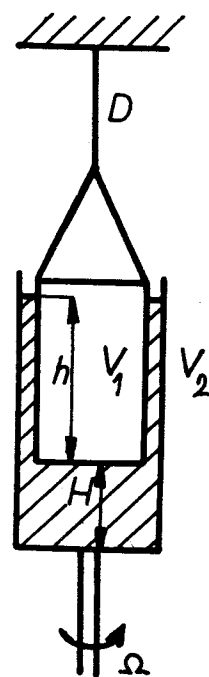
$$v_1 = -\frac{dh}{dt} = \frac{v_2 S_2}{\pi r^2}$$

Po dosazení $v_2 = \sqrt{2gh}$ a úpravě dostaneme hledaný vztah mezi r a h

$$h = \frac{v_1^2 \pi^2 r^4}{2g S_2^2},$$

kde v_1 volíme podle požadované rychlosti poklesu hladiny.

4. Rotační viskozimetr se skládá z dvou souosých válců, mezi kterými se nachází měřená kapalina (obr. 9,2). Jeden z válců, na našem obrázku vnější válec V_2 , rotuje s konstantní úhlovou rychlostí Ω . Určete dynamickou viskozitu η kapaliny, znáte-li velikost momentu síly M působícího na vnitřní válec V_1 (lze jej stanovit např. ze stočení drátu D , na kterém je zavěšen vnitřní válec). Znáte poloměry válců r_1 , r_2 a výšky H , h naznačené na obrázku. Dále předpokládejte $r_2 - r_1 \ll H$, aby bylo možno zanedbat vliv kapaliny mezi dny válců na moment síly M a vyšetřovat pouze poměry v kapalině mezi válcovými plochami. Napište podmínku, kterou musí proudění mezi válci splňovat, aby bylo laminární.



obr. 9,2

ru r je

$$v = \omega r, \quad (2)$$

kde ω je úhlová rychlost. Derivací vztahu (2) dostáváme

$$\frac{dv}{dr} = r \frac{d\omega}{dr} + \omega. \quad (3)$$

Druhý člen derivace (3) odpovídá případu, kdy kapalina rotuje jako celek a nedochází k vzájemnému posuvu sousedních válcových vrstev kapaliny. Pro rychlost smykové deformace je rozhodující první člen, který položíme dle Newtonova viskózního zákona roven výrazu τ/η , tedy

$$r \frac{d\omega}{dr} = \tau(r)/\eta$$

posadíme do (4) za $\tau(r)$ z (1) a dostaneme

$$r \frac{d\omega}{dr} = \frac{M}{2\pi h r^2 \eta}$$

odkud

$$\omega = \frac{M}{2\pi h \eta} \int \frac{1}{r^3} dr = \frac{-M}{4\pi h \eta} \frac{1}{r^2} + C \quad (5)$$

Dosadíme-li do (5) okrajovou podmínku odpovídající poměrům na vnitřním válci $\omega = 0$ pro $r = r_1$, dostáváme $C = M/4\pi h r_1^2$ a tedy

$$\omega = \frac{M}{4\pi h \eta} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (6)$$

pro rychlost Ω na vnějším válci potom dostáváme

$$\Omega = \frac{M}{4\pi h \eta} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)$$

a pro hledanou viskozitu η vztah

$$\eta = \frac{M}{4\pi h \Omega} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right).$$

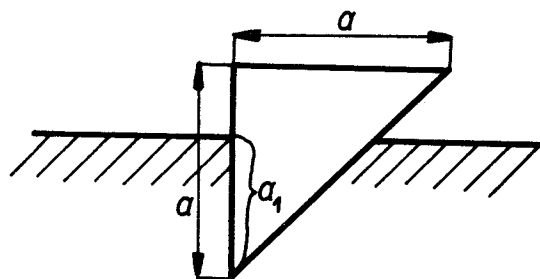
Pro stanovení laminarity proudění uijeme Reynoldova čísla $R = dv\rho/\eta$ (ρ hustota kapaliny) pro proudění mezi dvěma deskami vzdálenými d , jejichž vzájemná rychlost je v . Laminární proudění se udržuje pro hodnoty $R < 1900$. V našem případě dostáváme podmínku $dr_2 \Omega \rho/\eta < 1900$, kam jsme za v dosadili největší rychlost $v = r_2 \Omega$ v prostoru mezi válci viskozimetru.

Úlohy

- Hustoměr ke kontrole akumulátorů se skládá ze skleněné baňky o objemu $V_0 = 3 \text{ cm}^3$, ke které je shora přitavena trubička dlouhá $\ell = 5 \text{ cm}$. Jaký má být průměr q trubičky, má-li stupnice hustot, rozprostřená podél celé trubičky, sahát od $\rho_1 = 1,05 \text{ g/cm}^3$ do $\rho_2 = 1,40 \text{ g/cm}^3$? Na jakou hodnotu G je třeba zvětšit celkovou váhu hustoměru přívazkem umístěným v dolní části baňky?

- Jakou částí svého objemu je ponořena do rtuti ocelová kulicka na rozhraní voda - rtuť? Hustota oceli $\rho_o = 7,8 \text{ g/cm}^3$, rtuti $\rho_R = 13,6 \text{ g/cm}^3$, vody $\rho_v = 1 \text{ g/cm}^3$.

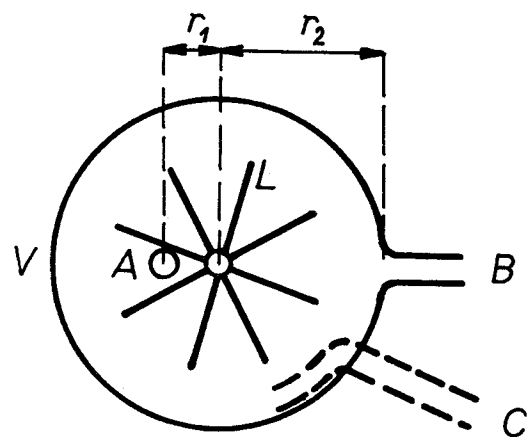
- Trojboký přímý hranol, jehož základnou je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, pluje v kapalině hustoty ρ způsobem naznačeným na obr. 9,3 (podstava hranolu je kolmá k hladině). Jak hluboko (a_1) musí být hranol ponořen, aby celková síla na hranol působící byla nulová? Jak velký dodatečný moment síly M musí na hranol působit, aby ho udržel v naznačené poloze? Délka hrany (odvěsny) $a = 15 \text{ cm}$, výška hranolu $V = 30 \text{ cm}$, hustota hranolu $\rho_1 = 0,7 \text{ g/cm}^3$. Hustota $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$.



obr. 9,3

- Předmět o hustotě ρ_p je na vzduchu vyvážen na rovnoramenných vahách mosazným závažím o hmotě m_2 . Stanovte skutečnou (na vakuum korigovanou) hmotu předmětu, je-li hustota mosazi ρ_z a hustota vzduchu za daných podmínek ρ_v .
- Šířka údolní přehrady $S = 40 \text{ m}$, výška $V = 60 \text{ m}$. Najděte celkovou sílu, již na přehradu působí vodní tlak, a její působistě, lze-li zeď přehrady pokládat za obdélníkovou a ležící ve svislé rovině.

- Odstředivé čerpadlo se skládá z válcové nádoby (bubny) V , v níž rotují lopatky L (obr. 9,4). Lopatkové kolo vodního čerpadla koná 2800 otáček za minutu. Sací potrubí (A) ústí do bubnu z boku ve vzdálenosti $r_1 = 2 \text{ cm}$ od osy, výtlačné potrubí (B) ústí na kraji bubnu ve vzdálenosti $r_2 = 5 \text{ cm}$ od osy. Odhadněte, do jaké maximální výšky může čerpadlo čerpat! Na obrázku čárkovně naznačené vyústění potrubí C zatím neuvažujte.

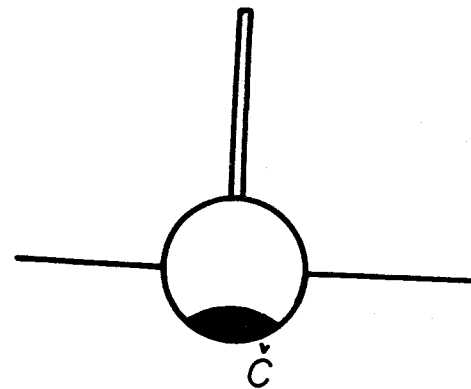


obr. 9,4

- Těleso bóje T má tvar duté koule o průměru $2R = 30 \text{ cm}$ a hmotnosti $m_1 = 4 \text{ kg}$ (viz obr. 9,5). Dole je zatíženo olověnou čočkou $\check{C}$ o hmotnosti $m_2 = 3 \text{ kg}$; vzdálenost těžiště čočky od středu koule je $x_1 = 13,3 \text{ cm}$. Jak vysokou tyč L je možná na

bóji připevnit, aby bóje zůstala stabilní? Hmoty tyče připadající na jednotku délky je $\mu = 1 \text{ kg/m}$.

- Dřevěný pravidelný čtyřboký hranol o výšce c , jehož čtvercová základna má stranu a , plave na vodní hladině tak, že jeho základna je vodorovná. Napište podmínku stability, je-li hustota použitého dřeva $\rho_D = 0,7 \text{ g/cm}^3$. Srovnajte s řešením příkladem 2.



obr. 9,5

- Stanovte přetlak p uvnitř kulové bubliny o poloměru R z kapaliny, jejíž povrchové napětí je F .

- Ústí kapiláry tvoří ostrou kruhovou hranu o poloměru $r = 0,5 \text{ mm}$. Je ponořeno $h = 5 \text{ mm}$ pod hladinou vody 18° C teplé. Jaký přetlak musí mít vzduch v kapiláře, aby začal probublávat z kapiláry? Povrchové napětí vody při udané teplotě je $7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$.

- Barometr, umístěný v místě A o známé nadmořské výšce $h_A = 230 \text{ m}$ ukazoval barometrický tlak $p_A = 739,5 \text{ torr}$. Současně byla v místě B změřena velikost barometrického tlaku $p_B = 725,0 \text{ torr}$.

a) Přepočítejte tlak p_A v místě A na hladinu moře (p_0).

b) Stanovte nadmořskou výšku bodu B, jsou-li splněny předpoklady pro barometrické měření výšek (klidná atmosféra, nevelká vzdálenost obou míst, vhodná denní doba). V barometrické rovnici položte střední teplotu $t = 16^\circ \text{ C}$. Hustota vzduchu při teplotě $t_1 = 0^\circ \text{ C}$ a tlaku $p_1 = 760 \text{ torr}$ je $\rho_1 = 1,293 \text{ kg/m}^3$ (vliv vlhkosti zanedbejte).

- Vzduchoplavecký balón o objemu $V = 5000 \text{ m}^3$ je naplněn vodíkem. Celková váha obalu balónu a gondoly je $G = 2 \text{ Mp}$.

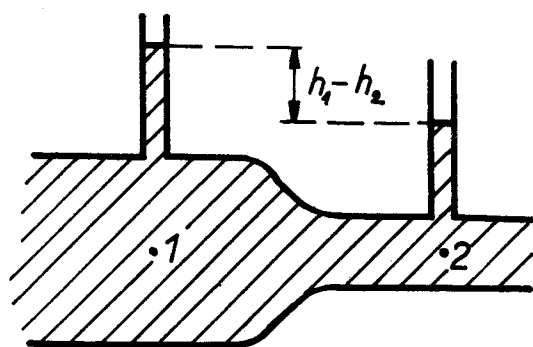
a) Vypočítejte sílu, kterou balón napíná kotevní lana před vypuštěním.

b) Do jaké výše balón po vypuštění vystoupí? Plnicí hadice na spodku balónu zůstává otevřena, takže přebytek plynu, roztahujícího se při stoupání balónu, může volně odcházet.

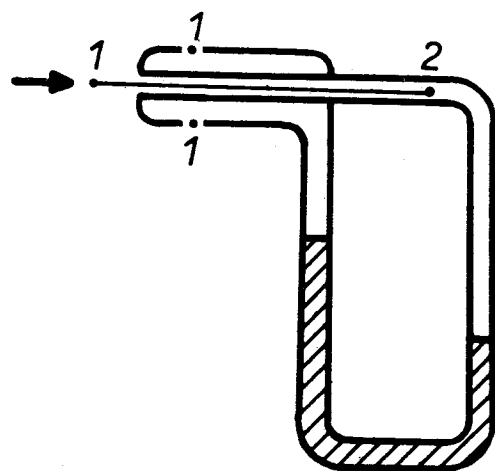
Zanedbejte ochlazování plynu při jeho rozpínání a předpokládejte, že teplota vodíku v balónu se nemění. Dále zanedbejte změny teploty atmosféry s výškou, takže lze použít barometrické formule. Při startu balónu je tlak $p_0 = 760 \text{ torr}$ a teplota $t_0 = 20^\circ \text{ C}$. Hustota vodíku za těchto podmínek je $0,084 \text{ kg/m}^3$, hustotu vzduchu vypočtete z dat udaných v předešlé úloze.

- Mikrováhy, sloužící k vážení velmi malých hmot, jsou v jedné úpravě zařízeny takto: na jedné straně vahadla, které je na rozdíl od běžných pákových vah provedeno jako velmi lehké, je kromě misky pro vážený předmět zavěšena též dutá, zatavená křemenná koule. Váhy jsou umístěny ve skříni, kde je možno měnit tlak vzduchu; tím se mění též vztlak působící na kouli a je možno vážený předmět jemně vyvážit.

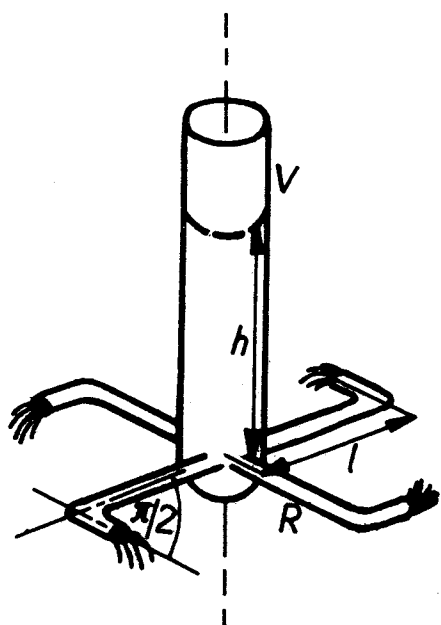
Vypočtete hmotu předmětu m , jestliže bez předmětu byly váhy vyváženy při tlaku $p_1 = 632 \text{ torr}$, s předmětem bylo pro vyvážení třeba zvýšit tlak na $p_2 =$



obr. 9,6



obr. 9,7



obr. 9,8

= 670 torr. Objem dutiny v křemenné kouli byl $1,5 \text{ cm}^3$, teplota byla udržována na 20° C . Vahadlo, závaží i všechny ostatní součástky na vahadle zavěšené byly z taženého křemene. Korekci na vakuum u předmětu neuvažujte.

14. Určete dobu T , za kterou vyteče veškerá kapalina z válcové nádoby poloměru R a z kulové nádoby poloměru R , je-li výška kapaliny v obou nádobách $H = R$ a obě nádoby mají ve dně otvor o poloměru r . Válcová nádoba je umístěna tak, že její osa má směr tíže. Kontrakci vodního paprsku při výtoku neuvažujte.

15. Na obr. 9,6 je znázorněn Venturiův vodoměr. V místě označeném 1 na obr. 9,6 je průřez trubice S_1 a v místě označeném 2 je průřez S_2 . Z rozdílu hladin $h_1 - h_2$ kapaliny v manometrických trubicích určete objem kapaliny Q , který proteče trubicí za jednotku času. Trubice je umístěna vodorovně.

16. Na obr. 9,7 je znázorněna Prandtlova trubice na měření rychlosti v proudícího vzduchu. Jsou to dvě soustředné trubice, z nichž vnitřní se při měření postaví otvorem proti směru proudění vzduchu, zatímco vnější má čelní část uzavřenu a otvory má na boku. Určete rychlost v , znáte-li rozdíl tlaků mezi vnitřní a vnější trubicí $p_2 - p_1$. Rozdíl tlaků se určí z rozdílných výšek kapaliny v manometru znázorněném na obrázku.

17. Dvě trubky o průřezích S_1 a S_2 jsou spojeny gumovou hadicí. Jaký největší objem kapaliny Q může za vteřinu proudit trubicemi, aniž by povolily spoje gumové hadice s trubicemi, udrží-li každý z těchto spojů sílu T . Předpokládáme, že gumová hadice může být za provozu ohnuta až o 180° . Hustota kapaliny je ρ . Předpokládejte konstantní rychlost kapaliny v celém průřezu trubice.

18. Stanovte moment síly M , působící na Segnerovo kolo (obr. 9,8) se čtyřmi rameny, v okamžiku, kdy se kolo začíná otáčet. Ve válci V je výška kapaliny h , ramena R

mají délku ℓ a průřez trubky, z které jsou ramena zhotovena, je všude stejný a roven S .

19. Vypočtete, jakého tlaku by teoreticky dosáhlo čerpadlo dle obr. 9,4, bude-li výtlačné potrubí provedeno nikoliv jako potrubí B, ale jako trubice C, vyznačená na obrázku čárkovaně. Vzdálenost ústí od vnější stěny bubny je malá, takže lze i pro toto ústí brát vzdálenost od osy rovnu $r_2 = 5 \text{ cm}$.

20. Ocelová kulička o poloměru $r = 0,15 \text{ cm}$ padá v glycerinu konstantní rychlostí v . Užitím Stokesova vzorce stanovte tuto rychlost. Hustota oceli $\rho_o = 7,8 \text{ g/cm}^3$, glycerinu $\rho = 1,26 \text{ g/cm}^3$, dynamická viskozita glycerinu $\eta = 13,93 \text{ poise}$. Chyba Stokesova vzorce nepřesahuje 2 %, je-li Reynoldovo číslo $R = \frac{2rv \cdot \rho}{\eta} < 0,1$. Přesvědčte se, že v našem případě je tato podmínka splněna!

21. Dva rovinné kruhové disky o poloměru R jsou umístěny proti sobě ve vzdálenosti $d \ll R$ tak, že jejich osy splývají v jedné přímce; označme tuto přímku o . Jeden z disků rotuje kolem osy o úhlovou rychlostí ω . Jaký silový moment D stáčí druhý, stojící disk kolem osy o ? Vypočtete konkrétně pro $d = 0,5 \text{ cm}$, $r = 3 \text{ cm}$, $\omega = 10 \pi \text{ rad s}^{-1}$. Dynamická viskozita vzduchu je $\eta = 17,1 \cdot 10^{-6} \text{ N.s.m}^{-2}$.

22. Rovinnou homogenní kruhovou desku o poloměru R a hmotě M necháme kývat jako fyzické kyvadlo mezi dvěma svislými rovnoběžnými stěnami. Deska kýve v rovině rovnoběžné s oběma stěnami kolem pevného bodu A , který leží na obvodě desky. Přitom tloušťka d vzduchových vrstev je na obou stranách desky stejná a konstantní a předpokládáme $d \ll R$. Stanovte dekrement útlumu kyvů desky pro malé rozkvy.

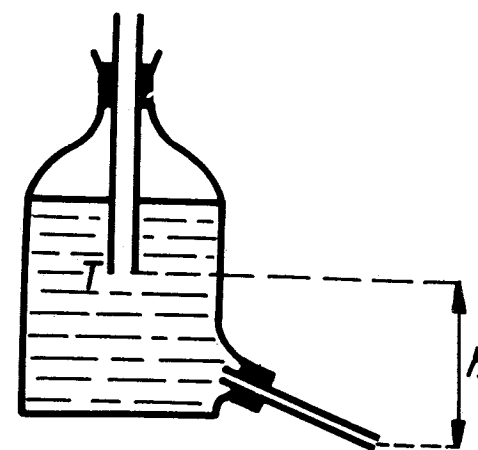
23. K absolutnímu měření viskozity kapalin lze použít m.j. i Mariotteovy láhve (obr. 9,9). Tato úprava zaručuje konstantní tlakový rozdíl při výtoku kapaliny; při výtoku klesá tlak vzduchu nad hladinou kapaliny tak dlouho, až začne probublávat z trubice T vzduch. Pak je hydrostatický tlak u ústí trubice T roven barometrickému a kapalina vytéká vlivem konstantního tlakového rozdílu, který odpovídá výškovému rozdílu h mezi ústím trubice T a výtokem kapiláry.

S kapilárou o světlosti $2r = 0,80 \text{ mm}$, dlouhou $\ell = 20 \text{ cm}$, byl, při rozdílu výšek $h = 15 \text{ cm}$, naměřen za dobu $t = 5 \text{ minut}$ vyteklý objem $V = 23 \text{ cm}^3$. Teplota vytékající vody byla 22° C .

a) Vypočítejte z těchto údajů viskozitu vody při dané teplotě. Použijte Poiseuilleova vztahu jednak bez Hagenbachovy korekce, jednak s ní. Porovnejte s tabulkovou hodnotou.

b) Vypočtete hodnotu Reynoldova čísla R a porovnejte ji s kritickou hodnotou R_k ; při proudění trubicí s kruhovým průřezem je R_k asi 1000.

24. Kapalina s dynamickým koeficientem viskozity η vytéká z nádoby kapilárou o délce ℓ s kruhovým průřezem o poloměru R . Plošná velikost S hladiny kapali-



obr. 9,9

ny v nádobě se přitom může obecně měnit s klesající výškou hladiny. Budeme psát tuto závislost $S = S(h)$, kde h je výška hladiny, měřené ve svislém směru od výtokového otvoru kapiláry.

a) Vypočtete, jak se bude rychlost klesání hladiny měnit při vytékání kapaliny. Jaká musí být závislost $S = S(h)$, aby rychlost byla konstantní?

b) Ukažte, že čas τ , který hladina potřebuje k průchodu mezi dvěma ryskami o výškách h_1, h_2 , je pro různé kapaliny úměrný jejich kinetickým koeficientům viskozity.

Předpokládáme přitom, že lze použít Poiseuilleova zákona bez Hagenbachovy korekce.

10. Vlnění a akustika

Řešené příklady

1. Za jakou dobu τ se dostane zvuk z místa A do místa B? Teplota t vzduchu mezi body A a B rovnoměrně stoupá ($t_A < t_B$).

Řešení:

Při nepříliš vysokém tlaku plynu je rychlost zvuku v plynu

$$v = v_0 \sqrt{1 + \gamma t},$$

kde γ je součinitel teplotní rozpínavosti plynu a v_0 je rychlost zvuku v plynu při teplotě $t = 0^\circ \text{C}$. Ve vzdálenosti x od bodu A je teplota

$$t = t_A + (t_B - t_A) x / \ell = t_A + ax,$$

kde $a = (t_B - t_A) / \ell$ a ℓ je vzdálenost mezi body A a B. Pak rychlost zvuku ve vzdálenosti x od bodu A

$$v = v_0 \sqrt{1 + \gamma t} = v_0 \sqrt{b + cx}$$

kde $b = t_A + \gamma t_A$; $c = \gamma a$.

Uvědomíme-li si, že $v = \frac{dx}{d\tau}$, můžeme pro dobu τ psát

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^\ell \frac{dx}{v_0 \sqrt{b + cx}} = 2 (\sqrt{b + c\ell} - \sqrt{b}) / v_0 c = \\ &= 2\ell (\sqrt{1 + \gamma t_B} - \sqrt{1 + \gamma t_A}) / v_0 \gamma (t_B - t_A). \end{aligned}$$

2. Ocelová struna délky ℓ a průměru $2r$ vydává při teplotě t základní tón kmitočtu ν . Vypočítejte změnu kmitočtu $\Delta \nu$ způsobenou vzrůstem teploty struny o Δt , jestliže délka struny nebyla měněna.

Řešení:

Při vzrůstu teploty o Δt se struna prodlouží o $\Delta \ell = \alpha \ell \Delta t$, kde α je teplotní součinitel délkové roztažnosti. Prodloužením struny o $\Delta \ell$ se změní síla F , která napíná strunu o ΔF ($\Delta F < 0$). Tuto změnu napínací síly určíme z Hookova zákona. ΔF musí být v absolutní hodnotě tak velké, aby prodloužilo strunu délky ℓ a průřezu $S = \pi r^2$ o $\Delta \ell = \alpha \ell \Delta t$. Označíme-li E Youngův modul pružnosti v tahu, potom

$$\begin{aligned} \alpha \ell \Delta t / \ell &= - \Delta F / E \pi r^2 \\ \Delta F &= - \alpha E \pi r^2 \Delta t. \end{aligned}$$

Kmitočet základního tónu struny

$$\nu = \sqrt{F / \mu} / 2\ell$$

kde M je hmota jednotkové délky struny. Po vzrůstu teploty o Δt bude kmitočet základního tónu struny

$$\nu' = \nu + \Delta\nu = \sqrt{(F + \Delta F)/M} / 2\ell = \sqrt{(F - E\alpha r^2 \pi \Delta t) / M} / 2\ell$$

$$(\nu + \Delta\nu)/\nu = \sqrt{1 - \alpha E \pi r^2 \Delta t / F} \approx 1 - \alpha E \pi r^2 \Delta t / 2 F$$

$$\Delta\nu = -(\alpha E \pi r^2 \Delta t) / 8 \nu \ell^2 M.$$

Pro ocelovou strunu $\alpha \approx 9 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, $E \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ a hustota $\rho \approx 7,2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Při zahřátí ocelové struny o $\Delta t = 1 \text{ grad}$ je $\Delta\nu \approx -31/\nu \ell^2$ (kde ℓ je v metrech a ν v Hertzech).

3. Vlak se blíží po přímé vodorovné dráze rychlostí $v = 5 \text{ m/s}$ k tunelu ve skále. Lokomotivní píšťalou základního kmitočtu $\nu = 320 \text{ Hz}$ dává před tunelem strojvedoucí výstražná znamení. Zvuk píšťaly se odráží od svislé stěny skály. Jaký kmitočet mají rázy pozorované

a) pozorovatelem, stojícím u trati a dívajícím se za vlakem, který se blíží k tunelu,

b) strojvedoucím na lokomotivě.

Rychlost zvuku ve vzduchu $c = 340 \text{ m/s}$.

Řešení:

a) Zdroj zvuku se od pozorovatele vzdaluje rychlostí v . Z Dopplerova principu můžeme určit kmitočet ν_1 tónu píšťaly vnímaný pozorovatelem

$$\nu_1 = c\nu / (c + v).$$

Na svislé stěně skály nastává odraz zvuku. Zdroj zvuku se ke skále přibližuje rychlostí v . Při odrazu se jeho kmitočet nezmění. Pozorovatel je vzhledem ke skále v klidu.

Odražený zvuk píšťaly vnímá pozorovatel jako tón frekvence

$$\nu_2 = c\nu / (c - v)$$

Pozorovatel slyší rázy kmitočtu

$$\nu_r = \nu_2 - \nu_1 = 2c\nu v / (c + v)(c - v) \approx 9,41 \text{ Hz}.$$

b) Strojvedoucí má vzhledem k píšťale nulovou rychlost. Zvuk píšťaly vnímá jako tón kmitočtu $\nu'_1 = \nu$. Ke stěně, na které dochází k odrazu, se blíží rychlostí v . Odražený zvuk vnímá jako tón kmitočtu $\nu'_2 = (c + v)\nu / (c - v)$.

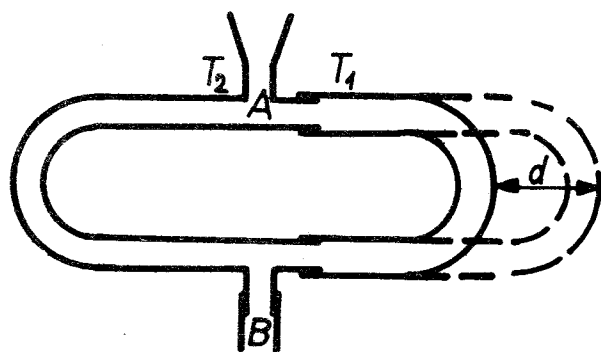
Strojvedoucí slyší rázy kmitočtu

$$\nu'_r = \nu'_2 - \nu'_1 = 2v\nu / (c - v) \approx 9,55 \text{ Hz}.$$

Úlohy

1. Určete rychlost v šíření zvuku v dvouatomovém plynu. Při tlaku $p = 760 \text{ torr}$ je hustota plynu $\rho = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$.
2. Jaká je rychlost v šíření zvuku v dusíku, víme-li, že střední kinetická energie postupného pohybu molekul jednoho kilomolu dusíku $E = 3,4 \cdot 10^6 \text{ J}$.
3. Určete dobu τ , za kterou se zvuk ze země dostane do výše $h = 10 \text{ km}$. U povrchu země je teplota vzduchu $t_0 = 20^\circ \text{ C}$ a vertikální gradient teploty v atmosféře $\alpha = -7 \cdot 10^{-3} \text{ grad/m}$.
4. Dokažte, že v každé podélné sinusové vlně v plynu, při nepříliš vysokých tlacích, je relativní změna tlaku $dp/p = \mathcal{E} v/c$, kde $\mathcal{E}$ je Poissonova konstanta plynu, v je okamžitá rychlost částice plynu a c je rychlost zvuku.
5. Určete mezní úhel dopadu α_0 rovinné akustické vlny na rozhraní vzduch-voda. Rychlost zvuku ve vodě $v_2 = 1450 \text{ m/s}$ a ve vzduchu $v_1 = 340 \text{ m/s}$.
6. Určete rychlost šíření v_1 vln vznikajících na vodní hladině za jedoucí lodí, jede-li loď rychlostí v_2 a přímé okraje brázdy za jedoucí lodí svírají úhel φ .
7. Vypočtete grupovou rychlost u pro tyto zákony disperze:
 - a) $v = a$ - zvukové vlny ve vzduchu,
 - b) $v = a / \sqrt{\lambda}$ - kapilární vlny,
 - c) $v = a/\lambda$ - příčné kmity tyče,
 - d) $v = a / (1 - b\lambda^2)$ - elmg. vlny v ionosféře.
 (a, b jsou konstanty.)
8. Rychlost šíření podélných vln v mědi $v_1 = 4720 \text{ m/s}$. Určete rychlost v_2 šíření příčných vln v mědi, je-li elastická Poissonova konstanta $m = 100/36$.
9. Posunutí částice ve směru postupu rovinné akustické vlny ve vzduchu je dáno vztahem

$$u = 10^{-4} \cdot \sin(1256 t - 3,7 x) \text{ metrů},$$
 kde t je čas ve vteřinách, x je souřadnice v metrech na ose, podél níž se vlna šíří. Určete kmitočet ν , rychlost šíření vlny c , délku vlny λ , amplitudu kmitů rychlosti v_0 každé částice, amplitudu kmitů tlaku p_0 , za předpokladu, že jde o děj adiabatický.
10. Postupná rovinná vlna kmitočtu $\nu = 10^3 \text{ Hz}$ o tlakové amplitudě $p_0 = 1 \text{ dyn/cm}^2$ se šíří bez absorpce ve vzduchu rychlostí $v_1 = 331 \text{ m/s}$ a ve vodě rychlostí $v_2 = 1485 \text{ m/s}$. Jak velkou hustotu energie w a intenzitu vlnění I má tato vlna.
11. Dvě rovinné sinusové vlny postupují stejným směrem rychlostmi v_1 a v_2 . Těmto vlnám přísluší vlnové délky λ_1 a λ_2 . Určete vzdálenost d mezi sousedními rovinami, ve kterých kmity vzbuzené oběma vlnami jsou ve fázi. Najděte výraz pro rychlost u pohybu těchto rovin.



obr. 10,1

12. Měření délek λ velmi krátkých akustických vln se provádí v Quinckově trubici (viz obr. 10,1). V bodě A se vzduch do trubice vstupující rozděljuje do 2 větví T_1, T_2 . Délku větve T_1 lze měnit jejím vysouváním. Zvuk po interferenci je veden k uchu hadičkou, připojenou v bodě B. Vzdálenost mezi polohami trubice T_1 při dvou po sobě naměřených minimech zvuku $d = 1,5$ cm. Vypočítejte vlnovou délku λ zvuku a jeho kmitočet při teplotě vzduchu $t = 25^\circ \text{C}$.

13. Porovnejte kmitočty ν základních tónů otevřené varhanové píšťaly délky $\ell = 1$ m, jestliže je naplněna jednou vzduchem a podruhé vodíkem.
14. Vypočítejte rezonanční kmitočty ν trubice délky $\ell = 75$ cm při teplotě vzduchu v trubici $t = 20^\circ \text{C}$ je-li
a) trubice otevřena na obou koncích,
b) uzavřena na jednom konci.
15. Struna je napnuta silou $F = 15$ kp. Vnímáme-li současně základní tón struny a tón ladičky, slyšíme rázy. Kmitočet rázů $\nu_r = 8$ Hz. Při napínací síle struny $F_1 = 16$ kp je kmitočet základního tónu struny ν_1 stejný jako kmitočet tónu ladičky. Určete kmitočet ν_1 .
16. Dokažte, že výraz $y = A e^{i(\omega t - kx)}$ vyhovuje vlnové rovnici
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$
17. Netopýr letící kolmo ke stěně rychlostí $v = 6$ m/s vydává ultrazvukový tón kmitočtu $\nu = 4,5 \cdot 10^4$ Hz. Rychlost zvuku ve vzduchu $c = 340$ m/s. Jaký kmitočet má zvuk, který vnímá netopýr?
18. Masivní zvučící ladička se pohybuje z bodu A rychlostí $v = 25$ cm/s po nejkratší přímé dráze ke stěně. Pozorovatel v bodě A slyší rázy o kmitočtu $\nu_r = 3$ Hz. Vypočítejte kmitočet ladičky ν . Rychlost zvuku $c = 340$ m/s.
19. Zdravé ucho může zachytit tón kmitočtu $\nu = 10^2$ Hz, jestliže je jeho tlaková amplituda $P_s \approx 2 \cdot 10^{-2}$ dyn/cm². Jak velká amplituda elongace U_s a rychlosti V_s odpovídá této hodnotě P_s ve vzduchu? U zvuku téhož kmitočtu je tlaková amplituda na prahu bolesti $P_b \approx 2 \cdot 10^2$ dyn/cm². Jak velká amplituda elongace U_b odpovídá této vlně ve vzduchu a ve vodě?
20. Hladina hlasitosti zvuku na ulici $A = 70$ fónů. V místnosti je jeho hladina hlasitosti $A_1 = 40$ fónů. Určete poměr intenzity zvuku I na ulici k intenzitě zvuku v místnosti I_1 .
21. Určete výslednou hladinu hlasitosti A v pozorovaném místě buzenou současně 10 motocykly, víme-li, že hladina hlasitosti od jednoho motocyklu je v pozorovaném místě $A_1 = 90$ fónů.
22. Ve vzdálenosti $\ell_1 = 10$ m od zvučící ladičky přestal být zvuk slyšen o dobu $\Delta t = 30$ s dříve, než ve vzdálenosti $\ell_2 = 1$ m. Vypočítejte koeficient útlumu ladičky.
23. Intenzita zvuku ve vzdálenosti $\ell_1 = 20$ m od zdroje je $I_1 = 0,03$ erg/cm²s. Jaká je intenzita zvuku I_2 ve vzdálenosti $\ell_2 = 100$ m od zdroje, je-li koeficient útlumu pro tento zvuk $k = 5 \cdot 10^{-5}$ cm⁻¹.

ŘEŠENÍ ÚLOH

1. Kinematika bodu

1. Drahou je elipsa $\frac{x_1^2}{c^2} + \frac{x_2^2}{d^2} = 1$. Tečná složka zrychlení $a_t = 0$ ve vrcholech elipsy, tj. pro body elipsy ležící na osách souřadných. Ve speciálním případě $c = d$ by pohyb byl rovnoměrným pohybem kruhovým a tečná složka zrychlení a_t by byla nulová pro všechny body dráhy.
2. Elipsa se středem v bodě $[3, 2]$ a poloosou ve směru osy x_1 dlouhou 4 a ve směru osy x_2 5 délkových jednotek.
rychlost $\vec{v} (v_1, v_2)$
$$v_1 = -4 \sin t$$

$$v_2 = 5 \cos t$$

tečná složka zrychlení $\vec{a}_t$
$$a_{t1} = \frac{36 \sin^2 t \cos t}{16 + 9 \cos^2 t}$$

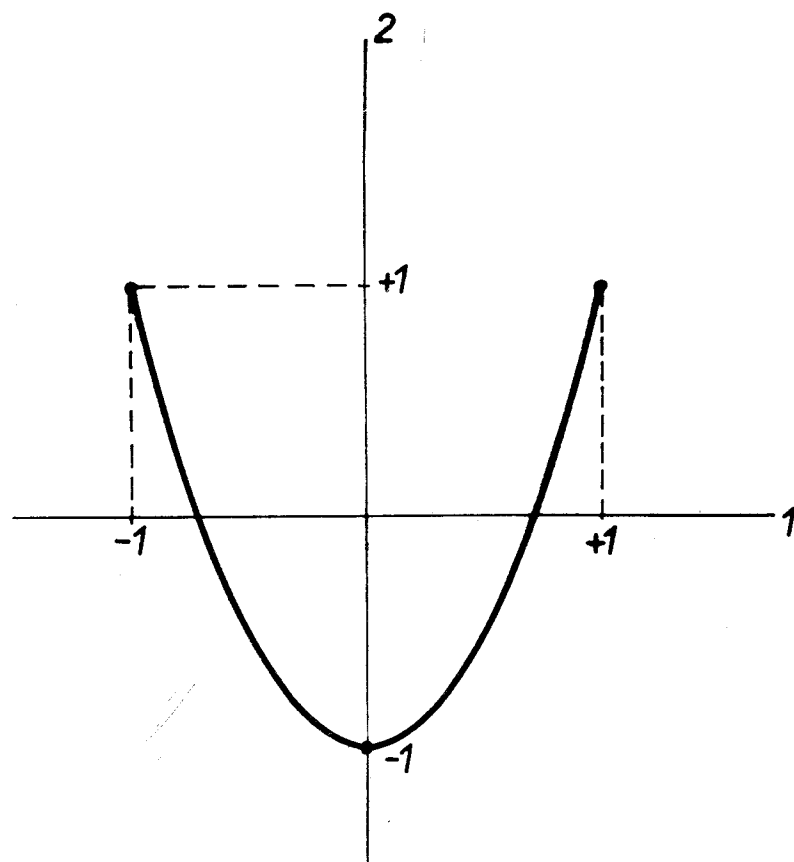
$$a_{t2} = \frac{45 \cos^2 t \sin t}{16 + 9 \cos^2 t}$$

zrychlení $\vec{a} (a_1, a_2)$
$$a_1 = -4 \cos t$$

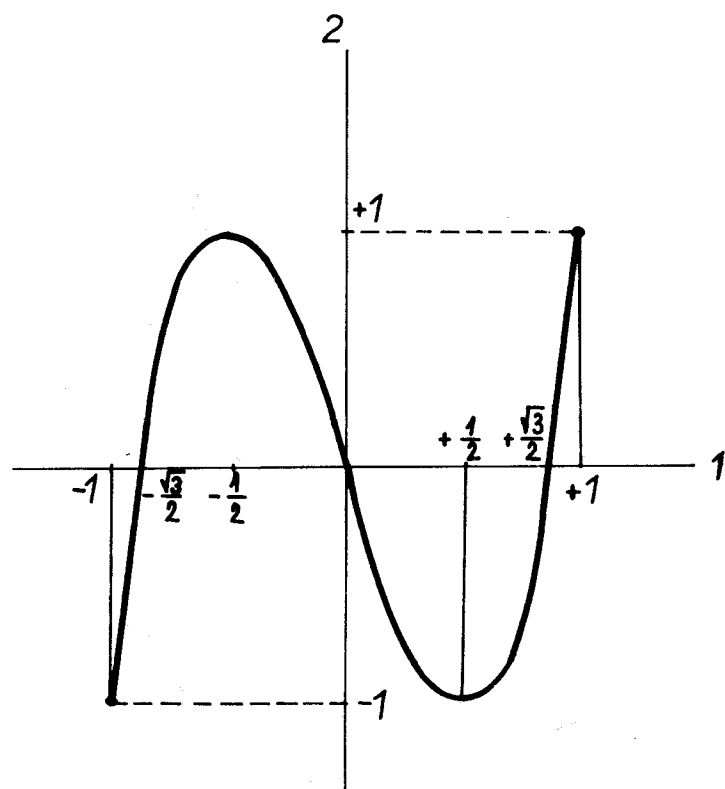
$$a_2 = -5 \sin t$$

normálová složka zrychlení $\vec{a}_n$
$$a_{n1} = \frac{-100 \cos t}{16 + 9 \cos^2 t}$$

$$a_{n2} = \frac{-80 \sin t}{16 + 9 \cos^2 t}$$
4. Návod: Z parametrické rovnice pohybu
$$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$
 a výrazu pro rychlost pohybu $v = at + v_0$ vylučte čas t .
5. a) Harmonický pohyb $s = A \sin(\omega t + \varphi)$ v úsečce $x_2 = x_1$, $x_1 \in \langle -1, 1 \rangle$, s úhlovou frekvencí $\omega = \frac{\pi}{2}$, amplitudou $A = \sqrt{2}$ a fázovou konstantou $\varphi = 0$.
b) Rovnoměrný kruhový pohyb na kružnici s poloměrem $R = 1$ s úhlovou rychlostí $\omega = \frac{\pi}{2}$ a s polohou v čase $t = 0$ určenou souřadnicemi $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.
c) Harmonický pohyb $s = A \cos(\omega t + \varphi)$ po úsečce $x_2 = -x_1 + 1$, $x_1 \in \langle 0, 1 \rangle$. Rovnovážná poloha je v bodě o souřadnicích $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1/2$, amplituda $A = \sqrt{2}/2$, úhlová frekvence $\omega = \pi$, fázová konstanta $\varphi = 0$.
d) Nerovnoměrný kruhový pohyb po kružnici s poloměrem $R = 1$ s konstantním úhlovým zrychlením $\varepsilon = \pi$. V čase $t = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Velikost tečné složky zrychlení $a_T = \pi$, normálové složky $a_N = \pi^2 t^2$, zrychlení $\vec{a}$ nemá tedy směr poloměru.
6. a) Parabola $x_2 = \frac{2B}{A^2} x_1^2 - B$ v intervalu $x_1 \in \langle -A, +A \rangle$; na obr. 1,3 je parabola znázorněna pro $A = B = 1$.
b) $x_2 = \frac{4Bx_1^3}{A^3} - \frac{3B}{A} x_1$ v intervalu $x_1 \in \langle -A, +A \rangle$
Na obr. 1,4 je křivka znázorněna pro $A = B = 1$.



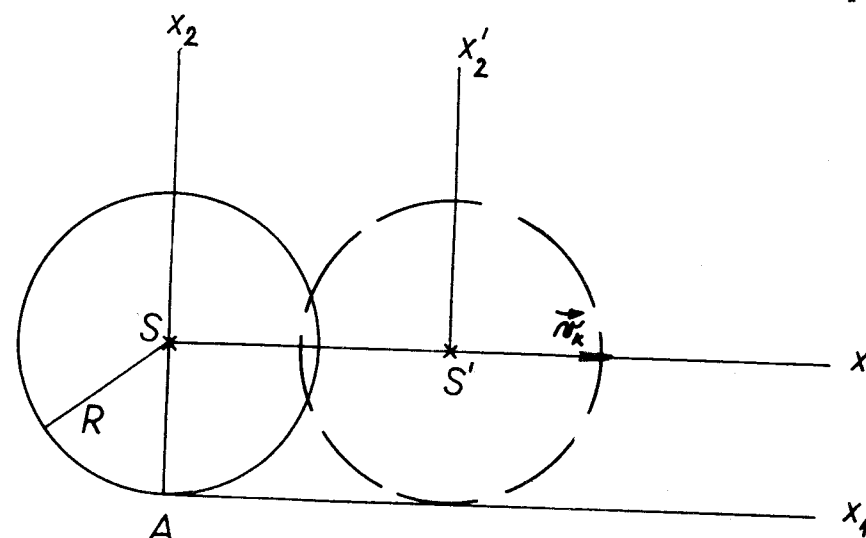
obr.: 1,3



obr.: 1,4

Křivky jsou Lissajousovy obrazce s nulovým fázovým posunutím vzájemně kolmých kmitů pro poměr frekvencí a) 1:2, b) 1:3.

7. Volba soustav souřadných je naznačena na obr. 1,5. Bod A značí polohu bodu



obr.: 1,5

v čase $t = 0$, S polohu středu v čase $t = 0$, S' polohu středu v libovolném čase t ; x_1, x_2 je soustava souřadná spjatá s rovinou; x'_1, x'_2 soustava souřadná s počátkem v bodě S' pohybující se rychlostí $\vec{v}_k$ vůči soustavě x_1, x_2 .

$$x_1 = R \cos \left(\frac{-v_k}{R} t - \frac{\pi}{2} \right) + v_k t$$

$$x_2 = R \sin \left(\frac{-v_k}{R} t - \frac{\pi}{2} \right) + R$$

$$v_1 = +v_k \sin \left(\frac{-v_k}{R} t - \frac{\pi}{2} \right) + v_k$$

$$v_2 = -v_k \cos \left(\frac{v_k}{R} t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 0 \text{ pro } \sin \left(\frac{-v_k}{R} t - \frac{\pi}{2} \right) = -1 \text{ a současně}$$

$$\cos \left(\frac{-v_k}{R} t - \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

To nastává pro $t = 2k\pi \frac{R}{v_k}$ ($k = 0, 1, 2 \dots$), tedy pro čas $t = 0$ a další časy, kdy vyšetřovaný bod se dotkne roviny.

$$a_1 = \frac{-v_k^2}{R} \cos \left(\frac{-v_k}{R} t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$a_2 = \frac{-v_k^2}{R} \sin \left(\frac{-v_k}{R} t - \frac{\pi}{2} \right)$$

V čárkované soustavě souřadné máme

$$x'_1 = R \cos \left(\frac{-v_k}{R} t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$x'_2 = R \sin \left(\frac{-v_k}{R} t - \frac{\pi}{2} \right)$$

a tedy

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 - v_k & a & & a_1' &= a_1 \\ v_2' &= v_2 & a_2' &= a_2 \end{aligned}$$

jak odpovídá přechodu mezi dvěma vzájemně rovnoměrně přímočaře se pohybujícími soustavami.

8. Ve vrcholu dráhy, tj. pro $x_1 = \frac{v_{10} v_{20}}{g}$.

9. $x = 5 \sin 4\pi t$ ($[x] = \text{cm}$)

10. Rovnice dráhy $x_2 = \frac{-4}{3} x_1 + 4$, velikost rychlosti $v = 50 \text{ t } \frac{\text{cm}}{\text{s}}$, velikost zrychlení $a = 50 \text{ cm/s}^2$. Úsek dráhy mezi osami $s = 5 \text{ cm}$, bod jej proběhne za čas $t = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ s}$. Rychlost $v_1 = 0 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ v bodě na ose x_1 , rychlost $v_2 = 10 \cdot \sqrt{5} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ na ose x_2 , průměrná rychlost na úseku mezi osami $\bar{v} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{2} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

11. $x_1 = 2 \cos \frac{\pi}{4} t + 2$
 $x_2 = 2 \cos \frac{\pi}{4} t - 2$

12. Jelikož velikost rychlosti $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{R^2 \omega^2 + k^2}$ není funkcí času t , je pohyb rovnoměrný. Jedná se o rovnoměrný pohyb po šroubovici.

13. V polárních souřadnicích mají parametrické rovnice tvar

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{A^2 \sin^2 \omega t + B^2 \sin^2 (\omega t + \alpha)} \\ \varphi &= \arctg \frac{B \sin (\omega t + \alpha)}{A \sin \omega t} \\ v_R &= \frac{dR}{dt} = \frac{\omega [A^2 \sin 2\omega t + B^2 \sin 2(\omega t + \alpha)]}{2R} \\ v_\varphi &= R \frac{d\varphi}{dt} = \frac{-AB\omega \sin \alpha}{R} \\ v_p &= \frac{1}{2} R^2 \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = \frac{1}{2} AB\omega \sin \alpha \\ a_R &= \frac{d^2 R}{dt^2} - R \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\omega^2 R \\ a_\varphi &= \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \left(R^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0 \end{aligned}$$

Všimněte si, že $v_p = \text{konst}$ a zrychlení $\vec{a}$ míří do počátku soustavy souřadné. (Jedná se o pohyb způsobený centrální silou $F = -m\omega^2 R$, neboli o tzv. dvoj-rozměrný harmonický oscilátor.)

14. Návod: Jako příklad uvedeme řešení pro elipsu. Z elementární vlastnosti elipsy plyne

$$R + R' = 2a.$$

Dále platí (viz obr. 1,6)

$$R'^2 = (2a + R \cos \varphi)^2 + R^2 \sin^2 \varphi$$

Z těchto dvou rovnic plyne

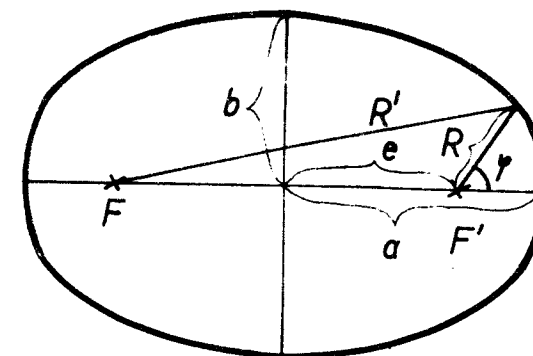
$$(R - 2a)^2 = (2e + R \cos \varphi)^2 + R^2 \sin^2 \varphi,$$

což lze upravit na tvar

$$R = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

kde užijeme vztahů $b^2 = a^2 - e^2$ a $\varepsilon = \frac{e}{a}$. Z druhého vztahu je zřejmé, že pro elipsu $\varepsilon < 1$.

Rovnice pro parabolu a hyperbolu lze odvodit obdobně. Pro parabolu $\varepsilon = 1$ a p je vzdálenost ohniska od řídící přímky pro hyperbolu $p = \frac{b^2}{a}$ stejně jako pro elipsu a $\varepsilon > 1$.



obr. 1,6

$$\begin{aligned} b) \quad v_R &= \frac{\varepsilon p \omega (\sin \omega t)}{(1 + \varepsilon \cos \omega t)^2} & a_R &= \frac{p \omega^2 (2\varepsilon^2 \sin^2 \omega t - 1 - \varepsilon \cos \omega t)}{(1 + \varepsilon \cos \omega t)^3} \\ v_\varphi &= \frac{p \omega}{1 + \varepsilon \cos \omega t} & a_\varphi &= \frac{2p \omega^2 \varepsilon \sin \omega t}{(1 + \varepsilon \cos \omega t)^2} \\ v &= \frac{1}{2} \frac{p^2 \omega}{(1 + \varepsilon \cos \omega t)^2} \end{aligned}$$

Pohyb má v obecném bodě křivky nenulovou složku zrychlení a_φ , nemíří tedy obecně zrychlení do počátku soustavy souřadné. Poznámka: Pohyb zde zadaný není pohybem, který se po kuželosečkách děje v případě působení centrální síly, kdy $a_\varphi = 0$ a v není funkcí času t , ale pohybem, který kuželosečky probíhá jinou rychlostí.

15. a) $r = R$ $v_r = 0$ $a_r = -R k^2 = \frac{-v^2}{R}$
 $\vartheta = kt + \vartheta_0$ $v_\vartheta = Rk$ $a_\vartheta = 0$
 $\varphi = \varphi_0$ $v_\varphi = 0$ $a_\varphi = 0$

R (poloměr země), k , ϑ_0 , φ_0 jsou konstanty, v je velikost vektoru rychlosti.

b) $r = R$ $v_r = 0$ $a_r = -R k^2 \sin^2 \vartheta_0 = \frac{-v^2}{R}$
 $\vartheta = \vartheta_0$ $v_\varphi = Rk \sin \vartheta$ $a_\varphi = 0$
 $\varphi = kt + \varphi_0$ $v_\vartheta = 0$ $a_\vartheta = -R k^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0$

Velikost vektoru $\vec{a}$, $a = \frac{v^2}{R \sin \vartheta}$

c) Vyjdeme z rovnic pro rychlost

$$v_r = 0; \quad v_\varphi = R \frac{d\varphi}{dt} \sin \vartheta = Rk, \quad v_\vartheta = R \frac{d\vartheta}{dt} = Rk$$

Z poslední rovnice integrací $\vartheta = kt + \vartheta_0$, po dosazení tohoto výsledku do předposlední rovnice a integrací $\varphi = \ln \left| \tan \frac{(kt + \vartheta_0)}{2} \right| + \varphi_0$ a zřejmě též $r = R$.

$$a_r = -2Rk^2 = \frac{-v^2}{R}, \quad a_\varphi = k^2 R \cotg (kt + \vartheta_0),$$

$$a_\vartheta = -Rk^2 \cotg (kt + \vartheta_0)$$

$$a = \sqrt{2} Rk^2 \sqrt{2 + \cotg^2 (kt + \vartheta_0)} = \frac{\sqrt{2} v^2}{2R} \sqrt{2 + \cotg^2 (kt + \vartheta_0)}$$

Všimněte si, že pro $(kt + \vartheta_0) \rightarrow \pi$, $\varphi \rightarrow \infty$, což odpovídá spirálovitému přiblížování pohybujícího bodu k pólu. Vyšetřování pohybu je tedy nutno omezit na interval $0 < \vartheta < \pi$.

16. a) $x = 2,1 t^2 + 1,8 t + 2$
 b) $x = 1,4 \sin(0,89 t + 0,21)$
 c) $x = 0,4 t^3 - 3,1 t + 1,3$

17. Pro úhel φ mezi směrem pohybu vlaku a směrem, kterým je nutno hodit balíček, platí

$$\cos \varphi = \frac{v_2 - v_1}{v_0}$$

18. $\alpha \approx 7^\circ 40'$

19. $t = \frac{h d}{f v \sin^2 \alpha}$ $t = \frac{1}{55 \cdot 10^3 \cdot \sin^2 \alpha}$

Všimněte si extrémně krátké doby pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Běžné expoziční doby vycházejí pouze pro malé úhly, přibližně pro $\alpha < 10^\circ$, případně $\alpha > 170^\circ$.

20. $v_1 = 12,5 \text{ km/hod.}$ $v_2 = 2,5 \text{ km/hod.}$

21. Body se potkají v čase a) $t = 2,43 \text{ s}$; b) $t = 44,5 \text{ s}$; c) $t_1 = 5,85 \text{ s}$, $t_2 = 34,14 \text{ s}$ ve vzdálenosti od bodu A.
 a) $7,29 \text{ m}$, b) $133,5 \text{ m}$, c) $17,6 \text{ m}$ a $102,4 \text{ m}$.

22. Průsečík drah má souřadnice $[\frac{3}{2}, 0]$ m. Vzájemnou polohu bodů vyjádříme rozdílem polohových vektorů $\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}_{A0} + \vec{v}_A t - \vec{r}_{B0} - \vec{v}_B t$. Vektor $\vec{r}_B - \vec{r}_A$ má složky $(3t, 6t-2)$ m. Vzdálenost bodů je dána výrazem $|\vec{r}_B - \vec{r}_A| = \sqrt{45t^2 - 24t + 4}$ m. Minimální hodnota $|\vec{r}_B - \vec{r}_A|$ nastane pro $t_0 = \frac{4}{15} \text{ s}$, odpovídající nejmenší vzdálenost bodů je $\sqrt{0,8} \text{ m}$. Pro úhel α mezi kladnými směry vektorů $\vec{r}_B - \vec{r}_A$ a $\vec{v}_A$ dostáváme podmínku

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \cdot \vec{v}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A| |\vec{v}_A|} = \frac{-3t + 4}{\sqrt{13 \cdot (45t^2 - 24t + 4)}}$$

23. Půl dráhy se zrychlením a , půl se zpžděním a . Doba průjezdu $t = 2\sqrt{\frac{L}{a}}$, nejvyšší rychlost $v = \sqrt{La}$.

24. Zrychlení klesá, protože se vzrůstajícím φ se zmenšuje krivost spirály.

25. $x = A + B e^{-kt}$, kde A a B jsou konstanty, které se určí z počátečních podmínek, tj. např. z polohy a rychlosti bodu v čase $t = 0$.

2. Dynamika hmotného bodu

1. Dvojnásobným derivováním parametrických rovnic (v případě f) přistoupí ještě stanovení složek zrychlení dle výrazů odvozených v řešeném příkladě 5, kap. 1) získáme složky zrychlení a z nich vynásobením hmotou m složky působící síly: a) $F_1 = F_2 = 0$; stálá síla nulové velikosti, b) $F_1 = 2ma_1$; $F_2 = 2ma_2$; stálá síla, c) $F_1 = 2ma_1$; $F_2 = 6m_2t$, d) $F_1 = -ma_1\omega^2 \sin \omega t$; $F_2 = -ma_2\omega^2 \cos \omega t$; centrální síla, e) $F_1 = 2ma_1\omega(\cos \omega t^2 - 2\omega t^2 \sin \omega t^2)$; $F_2 = -2ma_1\omega \cdot (\sin \omega t^2 - 2\omega t^2 \cos \omega t^2)$, f) $F_r = -ma_1\omega^2$; $F_\varphi = F_z = 0$; vzhledem k tomu, že pohyb se děje v prostoru, nejedná se o centrální sílu.

2. Ne. Tření musí být schopno realizovat dostředivou sílu, neboli výraz fmg musí být větší než mv^2/R , aby smyk nenastal. Dosazením číselných hodnot zjistíme, že v udaném případě podmínka není splněna.

3. K průřezu tíže do směru vlákna přičteme radiální složku zrychlení a_r (viz řešený příklad 5 kap. 1) vynásobenou hmotou kyvadla m . Dostaneme

$$F = mg [\cos(\phi_0 \sin \sqrt{g/L} t) + \phi_0^2 \cos^2 \sqrt{g/L} t].$$

4. a) Síla přenášená nití $F = m(g + a)$, v zadaném případě $a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

b) Pro sílu přenášenou nití platí $F = m\ell\omega^2$ a tedy $\omega = \sqrt{F/m\ell} = 4,43 \text{ s}^{-1}$.

5. Maximální síla, kterou tření musí přenést $F = \omega^2 mA$, tedy $fmg = \omega^2 mA$ a odtud $A = 4,9 \text{ cm}$.

6. Tyčí 1 je převáděna tahová síla $T_1 = G \sin \beta / \sin(\alpha + \beta)$, tyčí 2 tlaková síla $T_2 = G \sin \alpha / \sin(\alpha + \beta)$.

7. Z podmínky, že celková síla působící na kouli musí být nulová a z geometrie příkladu plynou rovnice $T \sin \varphi = F \cos(\alpha/2)$;

$F \sin(\alpha/2) + G = T \cos \varphi$; $R/(R + \ell) = \sin(\alpha + \varphi)$, které použitím vztahu $F = 2P \sin(\alpha/2)$, který platí mezi P a F , lze převést na tvar

$$T \sin \varphi - P \sin \alpha = 0$$

$$T \cos \varphi + P \cos \alpha = P + G$$

$$R/(R + \ell) = \sin(\alpha + \varphi)$$

Řešením těchto rovnic dostáváme $\sin \varphi = RP/(R + \ell)(P + G)$, dosazením za φ do poslední rovnice soustavy lze pak určit α a nejjednodušší z první rovnice soustavy potom určíme T . Ze známého α lze určit velikost F .

8. Závaží P o hmotě $7,3 \text{ kg}$, potom $T = 87,5 \text{ N}$.

9. Část AC je stále pod tlakovým namáháním $G\sqrt{2}$. Tato hodnota je také maximální hodnotou namáhání, která nastane v části BE pro $\alpha = \pi/4$ (tah), v části ED pro $\alpha = -\pi/4$ (tah) a v části BA pro $\alpha = \pm \pi/2$ (tlak).

10. $v_0 > \sqrt{gk_0/2}$, $x_0 = 10 \text{ m}$.

$$11. d = 0,32 \text{ m.}$$

$$12. v_0 = 21,8 \text{ m/s, } \alpha = 23^\circ 30'$$

13. $v_0 = 33 \text{ m/s, } \varphi = 50^\circ 10'$. Pro odhad, zda koule projde trubicí, můžeme úsek dráhy uvnitř trubice nahradit oskulační kružnicí. Její poloměr R vypočteme z hodnot normálového zrychlení a_n a velikosti rychlosti v koule v trubicí, dle známého vztahu $R = v^2/a_n$. Geometrickými úvahami s uvažováním průměru koule zjistíme, že koule trubicí projde.

14. a) Řešením pohybové rovnice $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kN$ získáme pro dané počáteční podmínky

$$x = v_0 t - kNt^2/2m; \quad s = v_0^2 m/2kN$$

b) Z pohybové rovnice $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt}$ plyne

$$x = (mv_0/k) (1 - e^{-kt/m}); \quad s = mv_0/k$$

c) Z pohybové rovnice $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ plyne

$$x = (m/k) \ln(1 + kv_0 t/m); \quad s \text{ nemá konečnou hodnotu.}$$

d) Z pohybové rovnice $m \frac{dv}{dt} = -k e^{-v/k_1}$ dostáváme

$$x = (k_1^2 m/k) \left[(k t/k_1 m - e^{v_0/k_1}) \ln(e^{v_0/k_1} - kt/mk_1) - kt/mk_1 + (v_0/k_1) e^{v_0/k_1} \right]$$

$$s = (k_1 m/k) \left[(v_0 - k_1) e^{v_0/k_1} + k_1 \right]$$

15. Pohybová rovnice střely je $m \frac{d^2x}{dt^2} = Sp_0 d^2/x^2 - S_b$.

Při jejím řešení použijeme vztahu $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$

a dostaneme $m v dv = (Sp_0 d^2/x^2 - S_b) dx$. Odtud integrací a dosazením podmínky $v = 0$ při $x = d$ plyne pro rychlost

$$v = \sqrt{2Sp_0 d^2 (x^{1-2} - d^{1-2}) / (1 - 2x) + 2S_b(d - x) / m}.$$

Dosadíme-li do výrazu pro v za x délku hlavně ℓ , dostaneme rychlost střely při opuštění hlavně.

16. Z pohybové rovnice $\frac{4}{3} \pi \rho_k r^3 \frac{dv}{dt} = 4\pi(\rho_k - \rho) r^3 g/3 - 6\pi\eta r v$ plyne s uvažováním počáteční podmínky

$$v = \frac{2r^2(\rho_k - \rho)g}{9\eta} (1 - e^{-9\eta t/2r^2\rho_k})$$

a z podmínky $(1 - e^{-9\eta \tau/2r^2\rho_k}) = 99/100$ dostáváme

$$\tau = 1,02 r^2 \rho_k / \eta.$$

17. Pohybová rovnice má tvar $26\ell \frac{d^2x}{dt^2} = 2x\sigma g$. Z ní při uvažování počátečních podmínek plyne

$$x = v_0 \sqrt{\ell/g} (e^{\sqrt{g/\ell} t} - e^{-\sqrt{g/\ell} t}) / 2 = v_0 \sqrt{\ell/g} \operatorname{sh} \sqrt{g/\ell} t.$$

Odtud lze vypočíst rychlost $v_k = \sqrt{g\ell + v_0^2}$.

18. a) Elektron (náboj označíme e) se bude pohybovat po parabolické dráze, jejíž parametrické rovnice jsou

$$x = v_0 t = t \sqrt{2W_0/m}; \quad y = -e E t^2/2m,$$

zvolíme-li soustavu souřadnou, jejíž osa x míří ve směru původního pohybu elektronu, osa y ve směru intenzity elektrického pole a počátek je v místě, kde elektron vstupuje do elektrického pole.

b) Vzdálenost $d = e E \ell^2/2mv_0^2 = e E \ell^2/4W_0 = 4,8 \cdot 10^{-2} \text{ cm.}$

c) Pro úhel α mezi původním směrem pohybu a směrem pohybu elektronu po opuštění kondenzátoru platí $\operatorname{tg} \alpha = e E \ell/2W_0$, odtud $\alpha = 2^\circ 45'$.

d) $W - W_0 = e^2 E^2 \ell^2/4W_0 = 2,3 \cdot 10^{-20} \text{ J.}$

V uvedených rovnicích je v_0 rychlost elektronu při vstupu do kondenzátoru, m hmota elektronu, e náboj elektronu, W energie elektronu při opuštění kondenzátoru a t čas.

19. a) Elektron se bude pohybovat po kružnici o poloměru $R = mv/eB$.

$$b) d = R(1 - \sqrt{1 - \ell^2/R^2}),$$

$$c) \sin \alpha = \ell/R,$$

d) nezmění se.

20. Je nutné, aby celková síla působící na elektron $\vec{F} = e\vec{E} + e(\vec{v} \times \vec{B})$ byla rovna nule. Tedy $\vec{E} = -(\vec{v} \times \vec{B})$, z čehož plyne, že magnetická indukce $\vec{B}$ musí být kolmá k $\vec{E}$, její složka B_1 do směru kolmého k $\vec{v}$ má velikost $B_1 = E/v = 6,4 \cdot 10^{-5} \text{ Wb/m}^2$ a vektory $\vec{E}$, $\vec{B}_1$, $\vec{v}$ tvoří pravotočivý systém.

21. a) $a_1 = a_2 = (m_1 - m_2)g / (m_1 + m_2)$; $T = m_1(g - a) = m_2(g + a) = 2m_1 m_2 g / (m_1 + m_2)$

b) $a_1 = 2a_2 = (4m_1 - 2m_2)g / (4m_1 + m_2)$; $T = 3m_1 m_2 g / (4m_1 + m_2)$

Kladné hodnoty zrychlení odpovídají případům, kdy hmota m_1 klesá a hmota m_2 stoupá.

22. Označíme-li a_1 zrychlení hmoty m_1 , máme

$$a_1 = a_2/2 = a_3/2 = \frac{m_1 - 2(m_2 + m_3) \sin \alpha}{4(m_2 + m_3) + m_1} g$$

Namáhání vláken jsou

$$T_1 = 2T_2 = \frac{(4 + 2 \sin \alpha) m_1 (m_2 + m_3)}{m_1 + 4(m_2 + m_3)} g$$

$$T_3 = m_3 (g \sin \alpha + a_3)$$

Zrychlení jsou kladná, klesá-li hmota m_1 .

23. Vodorovná složka síly $F_1 = -m_1 m_2 g (\cos 2\alpha) / (m_1 + m_2)$

Svislá složka síly $F_1 = -m_1 m_2 g (1 + \sin 2\alpha) / (m_1 + m_2)$

Za kladný pokládáme směr zleva doprava a zdola nahoru (viz obr. 2,12).

24. Složka pohybové rovnice ve směru vodorovném má tvar $(M + m) a_x = 2T$, kde T je označeno napětí ve vlákně a a_x společné zrychlení rámu M a hmoty m . Složka pohybové rovnice tělesa hmoty m ve směru svislém má tvar $m a_y = mg - T$. Z geometrie soustavy plyne vztah mezi zrychlením hmoty m ve svislém směru a

složkou zrychlení a_x ; $a_y = 2a_x$. Z uvedených rovnic vypočteme $a_y = 4 \text{ mg}/(M+5m)$. Těleso hmoty m koná ve svislém směru rovnoměrně zrychlený pohyb a odtud

$$d = \frac{1}{2} a_y t^2 \text{ a } t = \sqrt{d(M+5m) / 2mg}.$$

25. Je-li $f_1 > f_2$, tělesa se pohybují se společným zrychlením $a = g \sin \alpha - (f_1 m_1 + f_2 m_2) g (\cos \alpha) / (m_1 + m_2)$, síla $T = m_1 m_2 g (f_1 - f_2) (\cos \alpha) / (m_1 + m_2)$. Je-li $f_1 < f_2$, pohybují se tělesa samostatně se zrychlením $a_1 = g(\sin \alpha - f_1 \cos \alpha)$, $a_2 = g(\sin \alpha - f_2 \cos \alpha)$.

26. Podle vzájemného poměru velikostí f_1 , f_2 a $\tan \alpha$ rozlišíme případy

a) $\tan \alpha > f_1 \geq f_2$; potom $a_1 = g [\sin \alpha - f_1 \cos \alpha + m_2 (f_2 - f_1) (\cos \alpha) / m_1]$

$a_2 = g(\sin \alpha - f_2 \cos \alpha)$. V případě $f_1 = f_2$ je zřejmě $a_1 = a_2$.

b) $\tan \alpha > f_1$, $f_2 > f_1$; potom deska a hranol se pohybují jako jeden celek se společným zrychlením

$a_1 = a_2 = g(\sin \alpha - f_1 \cos \alpha)$, bez ohledu na to, je-li $f_2 > \tan \alpha$ nebo

$f_2 < \tan \alpha$.

c) $f_1 > \tan \alpha$; potom deska se nepohybuje ($a_1 = 0$) a hranol se pohybuje v případě $f_2 < \tan \alpha$ se zrychlením $a_2 = g(\sin \alpha - f_2 \cos \alpha)$, v případě $f_2 > \tan \alpha$ se ani hranol nepohybuje ($a_2 = 0$).

27. Z pohybových rovnic klínu

$$m_1 a_1 = m_1 g - T \sin \alpha - f T \cos \alpha$$

tělesa

$$m_2 a_2 = T \cos \alpha - f T \sin \alpha$$

a geometrického vztahu $a_2 = a_1 \tan \alpha$ dostaneme

$$a_1 = \frac{m_1 g (\cos \alpha - f \sin \alpha)}{(\sin \alpha + f \cos \alpha) m_2 \tan \alpha + m_1 (\cos \alpha - f \sin \alpha)}$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g \sin \alpha}{m_2 \sin \alpha (\sin \alpha + f \cos \alpha) + m_1 \cos \alpha (\cos \alpha - f \sin \alpha)}$$

$$a_2 = a_1 \tan \alpha; N = T \cos \alpha.$$

Pohyb se neuskuteční, když $f \geq \cot \alpha$.

28. Ano. Chceme-li obnovit rovnováhu, musíme na té straně rovnoramenných vah, kde není kladka, ubrat závaží o hmotě

$$m = (m_1 - m_2)^2 / (m_1 + m_2).$$

29. $\cos \alpha = g/\omega^2 \ell$; $T = m \omega^2 \ell$ (ω je úhlová rychlost otáčení). Jelikož $\cos \alpha$ závisí na délce závěsu, nebudou v případě znázorněném na obr. 2,16 nitě 1 a 1₁ ležet v jedné přímce.

30. $f = 0,56 \text{ s}^{-1}$.

31. Bod se bude pohybovat po povrchu koule až do místa, kde složka tíhové síly do směru poloměru bude právě stačit realizovat dostředivou sílu působící na hmotný bod pohybující se po kružnici poloměrem R a dále bude konat šikmý vrh. Z právě vyslovené podmínky stanovíme místo odtržení hmotného bodu od koule, když rychlost v místě odtržení určíme z podmínky zachování celkové mechanické energie hmotného bodu při uvažovaném pohybu.

$$\text{Vzdálenost } D = \frac{R}{27} (20\sqrt{2} + 5\sqrt{5}) = 14,6 \text{ cm}.$$

32. $l_{\max} > l > l_{\min}$, kde $l_{\max}$ získáme řešením rovnice

$$l_{\max} m_2 \omega^2 = m_1 g + F_0 + f_0 \sqrt{(m_1 g + F_0)(m_1 g + F_0 + 2m_2 g) + m_2^2 l_{\max}^2 \omega^4}$$

a $l_{\min}$ řešením rovnice

$$l_{\min} m_2 \omega^2 = m_1 g - F_0 - f_0 \sqrt{(m_1 g - F_0)(m_1 g - F_0 + 2m_2 g) + m_2^2 l_{\min}^2 \omega^4}$$

Číselně: $0,187 \text{ m} > l > 0,113 \text{ m}$.

Výpočet se zjednoduší, vypustíme-li pod odmocninou členy F_0 a pro zbylé členy použijeme aproximace

$$m_1 (m_1 + m_2) g^2 + m_2^2 l^2 \omega^4 \approx 2 m_1 (m_1 + m_2) g^2,$$

kteřou získáme, předpokládáme-li rovnost $m_1 g = m_2 l \omega^2$. Tato rovnost není, uvažujeme-li vliv tření přesně plněna. Pro zde zadané číselné hodnoty se však přibližně a pro větší l i přesně pouze v jednotkách milimetrů.

33. Zrychlení a' tělesa hmoty m_3 vůči soustavě souřadné spjaté s kladkou K_2 je $a' = (m_2 - m_3)(g + a_1) / (m_2 + m_3)$. Tento výsledek dostaneme způsobem shodným s řešením úlohy 21a. uvažujeme-li, že v neinerciální soustavě musíme kromě tíže uvažovat ještě zdánlivou sílu ma_1 (a_1 pokládáme za kladné, klesá-li těleso hmoty m_1). Pro namáhání vlákna T_2 dostáváme

$$T_2 = m_2 g + m_2 a_1 - m_2 a'.$$

Použijeme-li vztahu platného v inerciální soustavě souřadné $m_1 a_1 = m_1 g - T_1$ a z geometrie soustavy zřejmého vztahu $T_1 = 2T_2$, dostáváme po dosazení dříve odvozených vztahů

$$a_1 = g \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2 m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3}$$

Dále platí $a_2 = a' - a_1$, $a_3 = -a' - a_1$ (kladnou hodnotu a_2 , a_3 volíme ve směru tíže) a

$$T_1 = 2T_2 = \frac{8m_1 m_2 m_3 g}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)}$$

34. Sílou $F = (M + m_1 + m_2) \frac{m_1 g \cos \alpha - m_2 g \sin \alpha}{m_2 \cos \alpha + m_1 \sin \alpha}$

Kladná hodnota síly odpovídá vodorovnému působení ve směru zleva doprava (viz obr. 2,12).

35. $a = m g (\sin 2\alpha) / 2 (M + m \sin^2 \alpha)$

Návod: Vypočítejte zrychlení a' pohybu tělesa hmoty m po nakloněné rovině v soustavě souřadné spjaté s tělesem hmoty M ; $a' = g \sin \alpha + a_x \cos \alpha$. Z podmínky, že hmotný střed soustavy má nulové zrychlení, dostáváme druhý vztah mezi neznámými a' , a_x ; $a' = (M a_x + m a_x) / m \cos \alpha$. Porovnáním obou výrazů pro a dostaneme shora uvedený výsledek ($a_x = a$).

36. Těleso se bude pohybovat směrem vzhůru po nakloněné rovině se zrychlením $a_1 = a \cos 30^\circ - g \sin 30^\circ = 1,16 \text{ m/s}^2$.

37. a) Zrychlení $a = 2,3 \text{ m/s}^2$ má směr tíže.
 b) Zrychlení $a = 2,4 \text{ m/s}^2$ má směr opačný než je směr tíže.
 c) Zrychlení výtahu je rovno tíhovému zrychlení g .
 d) Zrychlení výtahu $a = 12 \text{ m/s}^2$ míří ve směru tíže a je větší než tíhové zrychlení g .

38. Pohybová rovnice hmotného bodu v neinerciální soustavě souřadné spjaté se zemí má tvar

$$m \vec{a} = m \vec{g}_s + m (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} + 2m (\vec{v} \times \vec{\omega}),$$

kde $\vec{\omega}$ je úhlová rychlost otáčení země, $\vec{r}$ polohový vektor bodu vzhledem ke středu země, $\vec{a}$ zrychlení a $\vec{v}$ rychlost bodu. Zrychlení $\vec{g}_s$ je tíhové zrychlení spjaté čistě s gravitačním působením země. Tíhové zrychlení $\vec{g}$ měřené v daném místě dostaneme, když k $\vec{g}_s$ přičteme odstředivé zrychlení, neboli

$$\vec{g} = \vec{g}_s + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}$$

a tento vektor $\vec{g}$ udává směr kolmice. Odchylku od kolmice způsobuje pouze Coriolisova síla $2m (\vec{v} \times \vec{\omega})$, která pro řešený příklad směřuje k východu. Složka pohybové rovnice do východního směru (souřadnici označíme x) je pro zeměpisnou šířku φ

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 2 m v \omega \cos \varphi.$$

Za velikost rychlosti v dosadíme hodnotu odpovídající volnému pádu $v = g t$ a po integraci dostaneme $x = g t^3 \omega (\cos \varphi) / 3$. Pro hledanou odchylku d po dosazení doby $T = \sqrt{2h/g}$ pádu z výše h dostaneme $d = 2 \sqrt{2} h^{3/2} \omega (\cos \varphi) / 3 \sqrt{g} = 1,4 \text{ cm}$. (V uvedeném výpočtu zanedbáme efekty druhého řádu, které souvisí se změnou rychlosti v v průběhu pádu způsobenou Coriolisovou silou.)

39. $F_c/G = 2 v \omega (\sin \varphi) / g = 3,2 \cdot 10^{-4}$.

40. $T = 24/\sin \varphi$ hodin. Výsledek dostaneme, uvažíme-li, že pro otáčení roviny kmitu je rozhodující radiální složka ω_1 úhlové rychlosti ω otáčení země; $\omega_1 = \omega \sin \varphi$. Podrobněji můžeme vyšetřovat pohyb kyvadla, napíšeme-li pohybovou rovnici pro hmotný bod m kyvadla v soustavě souřadné spjaté se zemí:

$$m \vec{a} = -mg \vec{r}/l + 2m (\vec{v} \times \vec{\omega}).$$

Zde $\vec{r}$ značí vektor vedený ve vodorovné rovině od rovnovážné polohy hmotného bodu k místu, kde se bod nachází (pro malé kyvy převádíme vyšetřování pohybu do vodorovné roviny), $\vec{a}$ je zrychlení, $\vec{v}$ rychlost hmotného bodu a l délka kyvadla. Zvolíme-li osu x_1 severním směrem, osu x_2 západním směrem a osu x_3 proti směru tíže, můžeme pohybovou rovnici rozepsat:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -g x_1/l + 2 \frac{dx_2}{dt} \omega \sin \varphi$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -g x_2/l + 2 \frac{dx_1}{dt} \omega \sin \varphi$$

Provedeme-li transformaci do soustavy ξ_i , která se otáčí úhlovou rychlostí $\omega_1 = \omega \sin \varphi$ podél osy x_3 vůči soustavě x_i

$$x_1 = \xi_1 \cos \omega_1 t + \xi_2 \sin \omega_1 t$$

$$x_2 = -\xi_1 \sin \omega_1 t + \xi_2 \cos \omega_1 t,$$

dostaneme pro ξ_1 a ξ_2 rovnice

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + (\omega_1^2 + g/l) \xi_1 = 0;$$

$$\frac{d^2 \xi_2}{dt^2} + (\omega_1^2 + g/l) \xi_2 = 0;$$

kteřé jsou rovnicemi dvojrozměrného harmonického oscilátoru. Kyvadlo může tedy kývat se stálou rovinou kyvu v soustavě souřadné ξ_i , která se otáčí úhlovou rychlostí $\omega_1 = \omega \sin \varphi$ vůči soustavě spjaté se zemí.

41. $D = \ell M / (M - m)$.

42. Z hydrodynamických úvah (Bernoulliho rovnice + rovnice kontinuity) lze pro ideální kapalinu odvodit, že hmota M nádoby s vodou bude záviset na čase t dle vzorce $M = C + Bt + At^2$ a doba, za kterou všechna kapalina vyteče, bude

$$T = \sqrt{2H(D^4 - d^4) / d^4 g}.$$

Ve výrazech pro M jsme užili označení $A = +\rho \pi D^2 d^4 g / 8(D^4 - d^4)$, $B = -(\rho \pi D^2 d^2 / 4) \sqrt{2gH / (D^4 - d^4)}$ a $C = M_0 + \rho \pi H D^2 / 4$. S tímto označením můžeme pro zrychlení nádoby psát $a = F/(C + Bt + At^2)$; rychlost nádoby v čase T určíme integrováním $[(B^2 - 4AC) < 0]$

$$v(T) = \int_0^T a dt = \int_0^T \frac{F dt}{At^2 + Bt + C} = \frac{2F}{\sqrt{4AC - B^2}} \left[\arctg \frac{2AT + B}{\sqrt{4AC - B^2}} - \arctg \frac{B}{\sqrt{4AC - B^2}} \right].$$

Číselně: $T = 45 \text{ s}$; $a(T) = 1 \text{ m/s}^2$, $v(T) = 10,2 \text{ m/s}$.

3. Odvozené mechanické veličiny

1. Tuhost pružiny $k \approx 2 \cdot 10^3 \text{ N/m}$.

$$A = \int_0^{\ell} kx dx = k\ell^2/2 = 2,5 \text{ J.}$$

2. Odhad lze provést tak, že zanedbáme deformační síly vznikající při podkasávací plachty. Počítáme práci vynaloženou na vyzdvižení hmoty celé plachty do výše ráhna.

$$A = (mg/a) \int_0^a x dx = mg a/2 \approx 24 \cdot 10^2 \text{ J}$$

3. $a = 70\% Pg/Gv = 5,04 \text{ m/s}^2$.

$$\begin{aligned} 4. \quad E_K &= m v_0^2/2 = 4050 \text{ J} \\ \overline{P} &= 981 \text{ kW} \\ \overline{P}_e &\approx 270 \text{ kW} \end{aligned}$$

5. $T = P/2\pi r f \approx 7,5 \text{ N}$

$$6. A = \int_0^{4v/5} (G - F_A) dx \approx 2,5 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$G = 4v\pi r^2 \rho g/5, \quad F_A = 4(v-x)\pi r^2 \rho g/5$$

G je váha bóje,

ρ je hustota vody ($\rho \approx 10^3 \text{ kg/m}^3$),

F_A je archimédovský vztlak.

7. Přírůstek kinetické energie sáněk po sjetí s kopce

$$\Delta E_K = (mgh - mg \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} h \cdot f) \dots$$

Tato energie se spotřebuje v rovinném úseku dráhy na práci vynaloženou k překonání tření.

$$\Delta E_K = f \cdot mg \cdot \ell$$

$$mgh(1 - f/\tan \alpha) = mg f \ell$$

$$f = h \tan \alpha / (\ell \tan \alpha + h) \approx 0,096$$

8. Kámen padá s výše $h = gt^2/2$. Ve výši $h/2$ je jeho $E_K = E_p$, položíme-li $E_p = 0$ pro $h = 0$.

$$mv_K^2/2 = mgh/2 = 98,1 \text{ J.}$$

9. Jednotky rychlosti, síly a výkonu by zůstaly beze změny. Zrychlení by mělo jednotku n -krát menší, práce, hybnost, impuls síly by měly jednotky n -krát větší, moment setrvačnosti n^3 -krát větší, tlak n^2 -krát menší a podobně pro ostatní veličiny.

10. Protože $h \ll R$ ($R \approx 6370 \text{ km}$ je poloměr Země), můžeme psát, že
 $A = mv^2/2 + mgh \approx 32,3 \cdot 10^6 \text{ Joula} \approx 8 \cdot 10^6 \text{ cal.}$

11. $m_1 = A/\xi = 5 [(mv_2^2 - mv_1^2)/2 + F_T \cdot \ell]/\xi \approx 0,06 \text{ kg}$
 A je celková práce vykonaná motorem.

12. Práce vykonaná atletem při každém vrhu je rovna kinetické energii E_K , kterou atlet udělí vrhanému náradí. $E_K = mv_0^2/2$, kde v_0 je počáteční rychlost náradí. Tuto rychlost určíme ze zákonů šikmého vrhu $v_0 = \sqrt{g\ell^2 / (\ell + h)}$. Práce vykonaná při každém vrhu $A = mg\ell^2/2(\ell + h)$.

Po dosazení a) $A_a \approx 647 \text{ J}$,

b) $A_b \approx 600 \text{ J}$,

c) $A_c \approx 360 \text{ J}$.

13. V každém bodě dráhy je součet kinetické a potenciální energie konstantní, proto např. musí platit, že

$$mgh = mg 2r + mv^2/2.$$

(v je rychlost v nejvyšším bodě kruhové dráhy.)

V tomto bodě na vozík působí síla $F = mv^2/r$ a váha $G = mg$. Aby se vozík udržel na dráze, musí platit

$$v^2/r \geq g.$$

Po dosazení do výrazu rovnosti mechanické energie ve dvou bodech dráhy můžeme vypočítat, že vozík musí sjíždět s výšky $h \geq 5r/2$, aby projel celou dráhu.

14. Automobil se s kopce pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem. Pak síla tření $F_T = G \cdot \sin \alpha$. V našem případě $\sin \alpha = 0,04$. Jede-li automobil do kopce, působí proti směru pohybu síla $F = F_T + G \sin \alpha = 2 G \sin \alpha$. Výkon motoru $P = F \cdot v \approx 12 \cdot 10^3 \text{ W}$.

15. a) $\vec{F}_0 = (12\vec{i} + 36\vec{j} - 54\vec{k})$ Newtonů.

$$b) \vec{a}_0 = \vec{F}_0/m = (12\vec{i} + 36\vec{j} - 54\vec{k}) \text{ m/s}^2.$$

$$c) E_{K0} = m\vec{v}_0^2/2 = 7 \text{ Joula.}$$

$$d) \frac{dE_K}{dt} = \vec{F}_0 \cdot \vec{v}_0 = 186 \text{ W.}$$

16. Provedeme rozvoj v Taylorovu řadu v okolí bodu $t = 0$. Omezíme-li se na první dva členy, dostaneme tyto přibližné hodnoty:

$$\vec{r}(t = 0,01) \approx \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t = (3,02\vec{i} - 1,97\vec{j} - 0,01\vec{k}) \text{ m}$$

$$\vec{v}(t = 0,01) \approx \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t = (2,12\vec{i} + 3,36\vec{j} - 1,54\vec{k}) \text{ m/s}$$

$$E_K(t = 0,01) \approx (m\vec{v}_0^2/2) + \vec{F}_0 \cdot \vec{v}_0 \cdot t = 8,86 \text{ J}$$

17. Vyjdeme ze zákona zachování energie. Celková mechanická energie loďi, po výstupu z atmosféry, ve vzdálenosti R od středu Země E_R je rovna celkové mechanické energii ve vzdálenosti r od středu Země E_r . Odtud $(mv_0^2/2) - (mv^2/2) =$

$= (\infty Mm/R) - (\infty Mm/r)$.
 ∞ je gravitační konstanta, M je hmota Země. $R \approx 6500 \text{ km}$.

$$v^2 = v_0^2 - (2\infty M/R)(1 - \frac{R}{r}),$$

ale $2\pi M/R \approx v_1^2$, kde v_1 je 2. kosmická rychlost, neboť $R \approx R_z$ (R_z poloměr Země). Potom $v \approx 4,8$ km/s.

18. Přírůstek kinetické energie ΔE_K je roven práci vnějších sil.

$$\Delta E_K = A - F_T \cdot s \quad \Delta E_K = (mv_2^2 - mv_1^2) / 2$$

$$A = 59,5 \text{ Joulů.}$$

$$19. E_p = \frac{kx^4}{4}.$$

20. a) Přírůstek kinetické energie se rovná práci vnějších sil.

$$mv^2/2 = \int_0^6 (2 + 6z) dz \quad \text{a odtud } v = 10 \text{ m/s}$$

$$b) F = ma$$

$$a = (2 + 6^2) / 2,4 = 15,8 \text{ m/s}^2$$

$$c) P = F \cdot v = 380 \text{ W}$$

21. a) Integrací pohybové rovnice dostaneme vztah pro rychlost

$$ma = 2 + 6t$$

$$v = (2t/m) + (6t^2/2m) = 60 \text{ m/s}$$

$$b) a = (2 + 6t)/m = 19 \text{ m/s}^2$$

$$c) P = F \cdot v = 2,28 \text{ kW}$$

22. Těžiště kabelu je v rovnovážném stavu ve vzdálenosti $\ell/4$ od tyče. V okamžiku, kdy koncový bod kabelu opouští tyč, je těžiště ve vzdálenosti $\ell/2$ od tyče.

Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme $mg\ell/4 = mv^2/2$ a z toho

$$v = \sqrt{g\ell/2}.$$

23. Za dobu dt dopadne na desku element vlákná, jehož hmota $dm = \rho dx$, kde ρ je hmota připadající na jednotkovou délku vlákná. Tento element při dopadu na desku ztrácí hybnost $d(mv) = F_x dt$. $F_x = \rho v^2$, kde v je rychlost dopadu tohoto elementu. Rychlost v určíme ze vztahu pro rychlost volného pádu s výše x ; $v = \sqrt{2gx}$. Pak $F_x = 2\rho gx$. Na stůl působí po dobu pádu síla $F = F_x + G_x = 2\rho gx + \rho gx = 3G_x$, kde G_x je váha části vlákná již na stůl dopadlého.

24. Ve výši h nad zemí bude $\vec{H} = m(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k})$, kde v_x, v_y, v_z jsou složky rychlosti $\vec{v}$ míče, ve výši h nad zemí.

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt,$$

t určíme ze vztahu $h = v_0 \sin \alpha t - gt^2/2$. Pro $\vec{H}$ dostaneme dvě řešení

$$\vec{H}_1 = (6 \vec{i} + 4,25 \vec{j}) \text{ kg m/s}$$

$$\vec{H}_2 = (6 \vec{i} - 4,25 \vec{j}) \text{ kg m/s}$$

$\vec{H}_1$ je hybnost míče ve výši $h = 5$ m při letu míče vzhůru,

$\vec{H}_2$ je jeho hybnost ve stejné výši při klesání míče.

25. Kinetická energie tělesa ve výši h nad zemí

$$E_K = mv_0^2/2 + mg(H - h)$$

Potenciální energie tělesa ve stejné výši h

$$E_P = mgh + C$$

Zvolíme-li $E_P = 0$ pro $h = 0$, je $C = 0$.

Celková mechanická energie tělesa

$$E = mgh + mv^2/2$$

je po dobu vrhu konstantní.

4. Harmonický pohyb

1. Při vychýlení z rovnovážného stavu začne na rtuť působit síla $F = -2\rho g Sx$, kde x je výchylka hladiny z rovnovážného stavu. Označíme $k = 2\rho gS$. Pak $T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{m/2\rho gS} \approx 0,77$ s.

2. Síla, kterou působí píst na hřídel v mrtvém bodě,

$$F = 2(\pi f)^2 m \cdot a \approx 31,36 \text{ N}$$

3. Po udělení malého svislého impulsu začne hustoměr vykonávat harmonický pohyb. Na hustoměr působí vnější síla $F = -\pi(d/2)^2 \rho g x$, kde x je okamžitá výchylka z rovnovážné polohy.

$$\text{Doba kmitu } T = \frac{4}{d} \sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}}$$

$$4. x_1 = A \sin \omega_1 t \quad (\omega_1 t) = 7 \text{ rad} \approx 401,1^\circ$$

$$t = 0,35 \text{ s}$$

$$x_2 = A \sin \omega_2 t \quad (\omega_2 t) = 7,35 \text{ rad} \approx 421,1^\circ$$

$$t = 0,35 \text{ s}$$

$$(x_2 - x_1) \approx 2,18 \text{ cm}$$

$$t = 0,35 \text{ s}$$

$$\text{Vzájemná rychlost } v = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = a(\omega_2 \cos \omega_2 t - \omega_1 \cos \omega_1 t)$$

$$v_t \approx 0,35 \text{ s} = 50$$

5. Těleso bude vykonávat harmonické kmity s rovnovážnou polohou ve středu Země

$$\text{a periodou } T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{R/g}.$$

$$\text{Doba } t = T/4 \approx 1250 \text{ s.}$$

6. Aby byla nit napjata, musí být během celého pohybu splněna nerovnost $mg > kx$. Odtud dostáváme $a = \frac{mg}{k} \approx 1,96 \text{ cm}$.

7. Výsledný pohyb je harmonický kmit s amplitudou

$$a = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)]^{1/2}.$$

Fázová konstanta tohoto kmitu α je dána vztahem

$$\text{tg } \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}$$

Číselně

$$a \approx 10,8 \text{ cm}, \quad \text{tg } \alpha \approx 1,54, \quad \alpha \approx 57^\circ.$$

8. Okamžitá výchylka výsledného kmitu je dána vztahem

$$x = 2a_1 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 0,4 \cos(t/2 - \alpha/2) \cos(99,5 + \alpha/2) \text{ cm}$$

Jde o případ rázu s kruhovou frekvencí kmitů $\omega_s = 99,5 \text{ s}^{-1}$ a frekvencí rázů $f_r = (1/2\pi) \text{ s}^{-1}$. Fázová konstanta α závisí na fázovém posunutí kmitů v čase $t = 0$, které nebylo udáno.

9. a) Rovnice výsledné dráhy je rovnice elipsy

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)$$

kde x je okamžitá výchylka jednoho kmitu,

y je okamžitá výchylka kmitu druhého.

Tvar dráhy závisí na rozdílu $(\alpha_2 - \alpha_1)$ fázových konstant jednotlivých kmitů.

- b) Výsledným pohybem je harmonický kmit po přímce $y = x$ s amplitudou $a = 2\sqrt{2} \text{ cm}$.

- c) Výsledným pohybem je pohyb ve směru otáčení hodinových ručiček po kružnici o poloměru $r = 2 \text{ cm}$.

Poznámka: Znázorněte si graficky řešení pro různé rozdíly fázových konstant.

10. $F = mg - m\omega^2 \cos \omega t = (4905 - 180 \cos 6t) \text{ dyn}$.
 $\omega = 2\pi/T = 6 \text{ s}^{-1}$.

Z podmínky $F = 0$ plyne, že mezní amplituda $a_m = g/\omega^2 \approx 27,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Při této amplitudě se tlak závaží v horním bodě dráhy rovná nule. Závaží bude odskakovat od desky při amplitudách $a > a_m$.

11. Závaží bude vykonávat harmonický pohyb. Okamžitá výchylka závaží počítaná od konce nezátížené pružiny

$$x = (G/k) (1 - \cos \sqrt{kg/G} \cdot t)$$

12. Kyvadlo mohu považovat za matematické kyvadlo s dobou kmitu $T = 2\pi \sqrt{\ell/g}$.
 Logaritmický dekrement útlumu $\lambda = (\ln A_0/A) \cdot T/t \approx 7,6 \cdot 10^{-3}$.

13. Amplituda vynucených kmitů

$$a = \frac{F_0/m}{\sqrt{[(2\pi/T_0)^2 - \omega^2]^2 + 4b^2\omega^2}}$$

kde ω je frekvence vynucující síly.

Amplituda a nabývá maximální hodnoty $a_R \approx 0,18 \text{ m}$

při rezonanční frekvenci $\omega_R = \sqrt{(2\pi/T_0)^2 - 2b^2} \approx 5,7 \text{ s}^{-1}$.

14. Stupeň vazby $\kappa = (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (\omega_2^2 + \omega_1^2) = 0,05$.

5. Všeobecný gravitační zákon

1. a) $v_I = \sqrt{\kappa M_Z/R_Z} = 7,9 \text{ km/s}$.

- b) Ze zákona o zachování energie $v_{II} = \sqrt{2\kappa M_Z/R_Z} = 11,2 \text{ km/s}$.

2. Když opustí oblast zemské přitažlivosti, pohybuje se těleso hmoty m s radius-vektorem $\vec{r}$ (počátek ve středu Slunce) pouze v gravitačním poli Slunce. Opisuje neuzavřenou křivku, je-li jeho energie

$$E = \frac{m}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 - \frac{\kappa M_S m}{|\vec{r}|} \geq 0.$$

Rychlost $\dot{\vec{r}} = \vec{v}_r + \vec{v}_z$, kde $\vec{v}_z$ je oběžná rychlost Země a $\vec{v}_r$ relativní rychlost tělesa vzhledem k Zemi. Nejmenší velikost $|\vec{v}_r|$, pro kterou lze splnit nerov-

nost, se dostane, mají-li $\vec{v}_z$ a $\vec{v}_r$ stejný směr: $|\vec{v}_r| = \sqrt{\frac{2\kappa M_S}{r_{zs}}} - |\vec{v}_z| = 2\pi(\sqrt{2} - 1) \cdot r_{zs}/T_Z$ (T_Z je oběžná doba Země). Odpovídající rychlost na povrchu Země se získá ze zachování energie: $\frac{1}{2} m v_{III}^2 - \frac{\kappa M_Z m}{R_Z} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_r|^2$, tedy

$$v_{III} = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z} + 4\pi^2 (\sqrt{2} - 1)^2 r_{zs}^2 \cdot \frac{1}{T_Z^2}} = 16,7 \text{ km/s}$$

3. Dostředivé zrychlení je vyvoláno přitažlivou silou Země:

$$4\pi^2 T^{-2} R = \kappa M_Z R^{-2}; T - \text{doba oběhu, } T = 1 \text{ hvězdný den} = \frac{365}{366} \cdot 24 \text{ hodin,}$$

$$R - \text{vzdálenost od středu Země. Tedy výška } R - R_Z = \sqrt[3]{\kappa M_Z T^2 (2\pi)^{-2}} - R_Z = 35,8 \cdot 10^3 \text{ km.}$$

4. Dle III. Keplerova zákona $T^2 = k \cdot S^3$, kde střední vzdálenost od středu Země $S = (6370 + \frac{1}{2}(1200 + 300)) \text{ km}$. Konstanta (stanovená třeba pro kruhovou dráhu) $k = 4\pi^2/(\kappa M_Z)$. Tedy $T = 5980 \text{ s} = 99 \text{ min } 40 \text{ s}$.

5. Zrychlení je $\xi_M = \kappa M_M/R_M^2$, přitom $\kappa M_M S_{MF}^{-3} = 4\pi^2 T_F^{-2}$. Tedy

$$\xi_M = \frac{4\pi^2 S_{MF}}{R_M^2 T_F^2} = 3,75 \text{ m.s}^{-2}$$

6. Do vztahu pro excentricitu ε a parametr p hyperbolické dráhy

$$(\varepsilon^2 - 1) = \frac{2Ek^2}{\kappa^2 M_M^2 \cdot m}, \quad p = \frac{k^2}{\kappa M_M} - \text{z řešení Keplerova problému) je třeba}$$

dosadit energii $E = mv_0^2/2$ a plošnou rychlost $k/2 = v_0 \cdot a/2$ sondy daleko od planety. Vztahy pro úhel asymptot $\varphi = 2 \arccos 1/\varepsilon$ a minimální vzdálenost od středu planety $r_m = p/(1 + \varepsilon)$ lze upravit:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha M_M}{a v_0^2}, \quad r_m = \frac{a \cos \frac{\varphi}{2}}{1 + \sin \frac{\varphi}{2}}$$

Výsledek: $\varphi = 51^\circ$; $r_m = 6310$ km.

7. Podle výsledku řešeného příkladu 1. působí v obou případech (jak v gravitačním poli homogenní koule, tak v poli hmotného bodu) na zbylou soustavu hmotných těles stejná síla $\vec{F}$. Podle principu akce a reakce, který je pro gravitační síly zřejmě splněn, působí tedy jak na homogenní kouli, tak na hmotný bod síla $-\vec{F}$.

8. Vrstvu V omezuji roviny $z = a$, $z = a + h$ ($h > 0$ tloušťka vrstvy).

$$E_z = \iiint_V \frac{r_z}{r^3} \alpha \rho \, r \, d\varphi \, dr \, dz = \alpha \rho \int_a^{a+h} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{z \cdot r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \, d\varphi \, dr \, dz =$$

$$= 2\pi \alpha \rho \int_a^{a+h} \left[\frac{-z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_{r=0}^\infty dz = 2\pi \alpha \rho \left[|z| \right]_{z=a}^{a+h}$$

Tedy

$$E_z = \begin{cases} 2\pi \alpha \rho h & \text{pro } a \geq 0 \\ 2\pi \alpha \rho \cdot (h + 2a) & \text{pro } -h < a < 0 \\ -2\pi \alpha \rho h & \text{pro } a \leq -h \end{cases}$$

Srovnej ovšem poznámku k řešenému příkladu 1. Integrální vyjádření potenciálu diverguje.

9. Síla odpovídající přivažku je rovná čtyřnásobku přitažlivé síly mezi jednou rtuťovou koulí a zdí: $g \Delta m = 8\pi \eta \rho h m$.
Z toho by plynulo $\alpha = 6,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^{-2}$.
10. Síla mezi K'_1 a K_1 (o velikosti $\frac{\alpha M m}{d^2}$) se silou mezi K'_2 a K_2 tvoří silovou dvojici s momentem $\frac{\alpha M m}{d^2}$. 2a. Podobně síla mezi K'_1 a K_2 (velikost $\frac{\alpha M m}{4a^2 + d^2}$) se silou mezi K_2 a K_1 tvoří silovou dvojici s momentem

$$\frac{2\alpha M m a}{4a^2 + d^2} \cdot \frac{d}{\sqrt{4a^2 + d^2}},$$

která stáčí závěs opačným směrem. Celkový moment

$$\frac{\alpha M m a}{d^2} \left(1 - \left(1 + \frac{4a^2}{d^2} \right)^{-3/2} \right) = k \varphi.$$

Z toho $\alpha = 6,75 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^{-2}$.

11. Má, $\vec{a}_\Sigma = -\operatorname{grad} V_\Sigma$, $V_\Sigma = \frac{\alpha M_S}{2r_{zs}^3} (-2x^2 + y^2 + z^2)$

12. Přibereme-li potenciál V_Σ z příkladu 11., změní se podmínka původní ekvipotenciály $V_g(r) = C$, splněné pro $r = R_z$, na vztah $V_g(r) + V_\Sigma = C$. Zde $V_g(r)$ je gravitační potenciál Země, závislý pouze na vzdálenosti od zemského středu. V blízkosti zemského povrchu ($r = R_z$) lze psát $V_g(R_z + h) = V_g(R_z) + g \cdot h$. Výška nové ekvipotenciály nad povrchem $h = r - R_z$ je tedy $h = -V_\Sigma / g$.

V bodech $\vec{r} = (\pm R_z, 0, 0)$ (přesně by mělo být $\vec{r} = (\pm [R_z + h], 0, 0)$,

ale $h \ll R_z$) je výška maximální; $h_{\max} = \frac{\alpha M_S R_z^2}{r_{zs}^3 g}$, v bodech v rovině yz (např.

$\vec{r} = (0, \pm R_z, 0)$ či $(0, 0, \pm R_z)$) je výška minimální: $h_{\min} = -\frac{\alpha M_S R_z^2}{2r_{zs}^2 g}$

V rozdílu $h_{\max} - h_{\min}$ ještě dosadíme za vzdálenost r_{zs} střední vzdálenost S_{zs} a uijeme III Keplerova zákona ve tvaru $4\pi^2 T_z^{-2} = \alpha M_S S_{zs}^{-3}$. (T_z je oběžná doba Země kolem Slunce.) Je pak

$$h_{\max} - h_{\min} = \frac{6\pi^2}{g T_z^2} \cdot R_z^2 = 0,246 \text{ m}.$$

13. Poměr slapových sil je dán poměrem činitelů před závorkou v (3) v příkladu řešeném 2 (r_{zm} je vzdálenost Měsíce od Země)

$$\frac{\alpha M_m r_{zm}^{-3}}{\alpha M_s r_{zs}^{-3}}$$

Dosadíme střední vzdálenosti a uijeme III Keplerův zákon jako v úloze 12; pro oběh Měsíce platí ve tvaru

$$4\pi^2 T_m^{-2} = \alpha (M_z + M_m) S_{zm}^{-3}$$

Uvedený poměr lze tedy upravit na

$$\frac{1}{1 + \frac{M_z}{M_m}} \cdot \left(\frac{T_z}{T_m} \right)^2 = 2,17$$

Působení Měsíce je tedy 2,17 krát silnější než sluneční. Skládají-li se tedy oba vlivy, měla by být výška přílivu $(2,7 + 1)$ krát větší než působením samotného Slunce, tedy 0,78 m; odčítají-li se, bude $(2,17 - 1)$ krát větší, tedy 0,29 m. Je známo, že výška přílivu na některých místech dosahuje až desítky metrů. Tento nesouhlas souvisí zejména s neplatností předpokladů b), c).

6. Z á k l a d n í ú l o h y m e c h a n i k y s o u s t a v
h m o t n ý c h b o d ů a t u h é h o t ě l e s a

1. Zvolíme-li soustavu souřadnou s počátkem v bodě o hmotě m_1 , s osou x mířící do bodu m_2 a osou y do bodu m_4 , má hmotný střed souřadnice

$$x_S = (m_2 + m_3) a/m = 10 \text{ cm},$$

$$y_S = (m_3 + m_4) a/m = 14 \text{ cm},$$

kde

$$m = \sum_{i=1}^4 m_i.$$

2. Hmotný střed leží v geometrickém těžišti trojúhelníka, tj. ve vzdálenosti $a\sqrt{3}/6 = 5,77 \text{ cm}$ od každé strany trojúhelníka.

3. V souřadné soustavě, která je nakreslena na obrázku 6,7, má hmotný střed souřadnice

$$x_S = 1 \text{ cm}$$

$$y_S = -0,715 \text{ cm}.$$

4. Hmotný střed tyče leží ve $2/3$ délky tyče blíže ke konci s větší hustotou.

5. Zvolíme-li souřadnou soustavu tak, jak je nakresleno na obr. 6,8, je poloha hmotného středu dána souřadnicemi

$$x_S = R/6 = 1,67 \text{ cm}; \quad y_S = 0.$$

6. Vezměme tu část koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, která leží v poloprostoru $x > 0$. Dvě souřadnice hmotného středu, y_S a z_S , jsou z důvodů symetrie nulové. Označíme-li $S(\xi) = \pi(R^2 - \xi^2)$ plochu řezu, ve které protíná polokouli rovina $x = \xi$ a dV element objemu, můžeme po vykrácení konstantní hustotou ρ psát pro x -ovou souřadnici hmotného středu

$$x_S = \frac{\int x dV}{\int dV} = \frac{\int_0^R x S(x) dx}{2\pi R^3/3} = 3R/8.$$

7. Zvolíme souřadnou soustavu tak, že kouli omezuje plocha $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, olověná polokoule je v poloprostoru $x > 0$, cínová v $x < 0$. Souřadnice y_S , z_S jsou opět z důvodů symetrie nulové. Je-li objem koule V , je hmota první polokoule $M_1 = \rho_1 V/2$, hmota druhé polokoule $M_2 = \rho_2 V/2$. Dle definice hmotného středu je

$$x_S = (x_1 M_1 + x_2 M_2) / (M_1 + M_2) = \frac{(3R/8)(\rho_1 V/2) - (3R/8)(\rho_2 V/2)}{(\rho_1 V/2) - (\rho_2 V/2)} =$$

$$= (3R/8) (\rho_1 - \rho_2) / (\rho_1 + \rho_2) = 0,166 \text{ cm}.$$

Ve vzorci pro výpočet x -ové souřadnice hmotného středu jsme symbolem x_1 označili hmotný střed olověné polokoule a symbolem x_2 hmotný střed cínové polokoule.

8. V soustavě souřadné naznačené na obr. 6,9 jsou souřadnice hmotného středu lana

$$x_S = \frac{x_{1S} M_1 + x_{2S} M_2}{M_1 + M_2}$$

$$y_S = \frac{y_{1S} M_1 + y_{2S} M_2}{M_1 + M_2}$$

kde $x_{1S} = \int_0^\varphi x \mu R d\varphi = -(R \sin \varphi) / \varphi$ je x -ová souřadnice, $y_{1S} =$

$= R(1 - \cos \varphi) / \varphi$ je y -ová souřadnice, $M_1 = \mu R \varphi$ je hmota obloukové části lana a $x_{2S} = (d/2) \sin \varphi$, $y_{2S} = (d/2) \cos \varphi$ a $M_2 = 2\mu \sqrt{d^2 + R^2}$ jsou analogické veličiny lomené části lana. Po dosazení a úpravě dostáváme

$$x_S = \frac{\sin \varphi (d \sqrt{d^2 + R^2} - R^2)}{R \varphi + 2 \sqrt{d^2 + R^2}}$$

$$y_S = \frac{R^2 + \cos \varphi (d \sqrt{d^2 + R^2} - R^2)}{R \varphi + 2 \sqrt{d^2 + R^2}}$$

Souřadnice $x_S = 0$ pro všechna φ , když $d = R\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$, potom $y_S = R/[\varphi + 2(\sqrt{5} + 1)/2]$ a uvědomíme-li si, že ve jmenovateli výrazu pro y_S je hmota lana M dělená délkovou hustotou μ , dostáváme $y_S = \mu R^2 / M$. Potenciální energie $U = M g y_S = \mu R^2 g$ a nezávisí na úhlu φ .

9. $v_{\max} = 35,15 \text{ km/hod.}; \quad v_{\min} = 24,85 \text{ km/hod.}$

10. Pro rychlost $\vec{v}$ bodu na povrchu Země platí vyjádření $\vec{v} = \vec{v}_s + \vec{\omega} \times \vec{r}$, kde $\vec{v}_s$ je rychlost hmotného středu Země, $\vec{\omega}$ je úhlová rychlost rotace Země kolem vlastní osy a $\vec{r}$ polohový vektor bodu na povrchu Země vůči středu Země. Velikost rychlosti $\vec{v}_s$ lze určit ze vzorce plynoucího z 2. Keplerova zákona $v_s = 2\pi ab/\rho T \sin \varphi$, kde a , b jsou poloosy oběžné elipsy, T doba oběhu Země kolem Slunce, φ vzdálenost Země od Slunce a φ úhel, který svírá spojnice Slunce - Země se směrem rychlosti $\vec{v}_s$ v okamžiku, kdy velikost v_s zjišťujeme. V periheliu $v_{sp} = 30,28 \text{ km/s}$, v afeliu $v_{sa} = 29,27 \text{ km/s}$. V naší zvolené soustavě souřadné dostáváme pro vektor $\vec{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ např. toto vyjádření $\vec{\omega}(k \cos \alpha, -k \sin \alpha, k \cotg \beta)$. Úhel $\alpha \pm 12^\circ$ je dán úhlovou vzdáleností zimního slunovratu a perihelia, úhel $\beta = 23^\circ 30'$ je úhlem sklonu zemské osy vzhledem ke směru osy z . Konstantu k určíme tak, aby velikost vektoru $|\vec{\omega}|$ odpovídala úhlové rychlosti otáčení Země vzhledem k zvolené soustavě, tedy $\omega = (2\pi/86156) \text{ s}^{-1}$. Velikost rychlosti $|\vec{v}|$ bude maximální, když $v^2 = v_s^2 + (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 + 2 \vec{v}_s \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})$ bude maximální. Výraz $\vec{v}_s \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{v}_s \times \vec{\omega}) \cdot \vec{r}$ bude maximální, když $\vec{r} = \vec{r}_{\max}$ bude kolmý k $\vec{v}_s$ a k $\vec{\omega}$ a vektory $\vec{v}_s$, $\vec{\omega}$, $\vec{r}$ v uvedeném pořadí budou tvořit pravotočivý systém. Protože $\vec{r}_{\max} \perp \vec{\omega}$, koncový bod $\vec{r}_{\max}$ musí ležet na rovníku a potom je maximální i druhý člen součtu v^2 . První člen součtu je pro určitou polohu Země stálý a tedy pro $\vec{r}_{\max}$ je velikost rychlosti v maximální. Vektor $\vec{v}_s$ v periheliu má složky $\vec{v}_{sp}(0, v_{sp}, 0)$. Vektor

$\vec{r}_{\max}$ má tedy nulovou druhou složku a uvažíme-li ještě podmínku $\vec{r}_{\max} \perp \vec{\omega}$ a podmínku pro smysl vektorů, dostáváme $\vec{r}_{\max} (k_1 \omega_3, 0, -k_1 \omega_1)$, kde $k_1 = R/\sqrt{\omega_3^2 + \omega_1^2}$ ($R = 6378$ km je rovníkový poloměr Země).

Maximální rychlost $\vec{v}_{\max}$ v periheliu dostaneme pak z obecného vzorce $\vec{v}_{\max} = \vec{v}_{\text{sp}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\max}$; číselně $\vec{v}_{\max} (1,5 \cdot 10^{-2}; 30,74; 3,5 \cdot 10^{-2})$ km/s, odkud, vyčísľujeme-li výsledek na desítky m/s, $v_{\max} = 30,74$ km/s.

Minimální hodnotu rychlosti v periheliu dostaneme pro bod na rovníku, který v daném okamžiku má polohový vektor $\vec{r}_{\min} (-k_1 \omega_3, 0, +k_1 \omega_1)$; příslušná velikost minimální rychlosti $v_{\min} = 29,82$ km/s.

Obdobné veličiny v afeliu mají hodnoty $v_{\max a} = 29,73$ km/s a $v_{\min a} = 28,81$ km/s.

11. $\vec{r} = \vec{A} - \vec{B} = (3, 3, 3)$ m
 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (27, -9, -18)$ N

12. Zvolíme-li souřadnou soustavu, jak je nakreslena na obrázku 6,10, dostaneme

$$x_{1S} = \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_1 + m_2} g t^2 \sin \alpha$$

$$x_{2S} = \frac{1}{2} \frac{m_2}{m_1 + m_2} g t^2 \cos \alpha$$

Hmotný střed se tedy pohybuje rovnoměrně zrychleně po přímce o rovnici

$$x_2 = (m_2/m_1) x_1 \cotg \alpha.$$

13. 1) $s_2 = 5 s_1 = 5000$ m

2) Hmotný střed se i po roztržení střely bude pohybovat po parabole, po které se původně střela pohybovala. Položíme-li počátek souřadné soustavy do místa výstřelu, svislou osu, jejíž kladný smysl míří vzhůru, označíme x_2 , a vodorovnou osu x_1 zvolíme tak, aby se střela pohybovala v rovině x_1, x_2 , dostaneme pro dráhu hmotného středu rovnici

$$x_2 = \frac{2h}{s_1} x_1 - \frac{h}{s_1^2} x_1^2.$$

14. Rychlost hmotného bodu v daném okamžiku $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = (-1, 2, -1)$ cm/s.
 Moment hybnosti $\vec{B} = \vec{r} \times m\vec{v} = (-12, 0, 12)$ g cm²/s.

15. a) Označme písmenem O bod na ose rotace, vzhledem ke kterému $\vec{B}$ počítáme,

$$\vec{B} = \vec{r} \times m\vec{v}; \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Vektor $\vec{B}$ závisí na poloze bodu O. Je-li O patou kolmice spuštěné z bodu m na osu otáčení, je $\vec{B} = m a^2 \vec{\omega}$.

b) $\vec{B} = m a^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega}$, kde I je moment setrvačnosti dvojice hmotných bodů vzhledem k ose otáčení. Poněvadž je hmotný střed této dvojice v klidu, nezávisí $\vec{B}$ na volbě referenčního bodu.

16. a) Hmotný střed tělesa je v klidu, proto $\vec{F} = 0$.

b) Protože hmotný střed tělesa je v klidu, $\vec{B}$ nezávisí na volbě referenčního bodu a rovná se $I \vec{\omega}$, kde I je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose

otáčení, $I = \frac{5}{8} m l^2$. Výsledný moment vnějších sil $\vec{M} = I \vec{\omega} = (5/8) m l^2 \vec{\omega}$, kde $\vec{\omega}$ je časová derivace $\vec{\omega}$ a $\vec{v}$ je jednotkový vektor ve směru $\vec{\omega}$.

17. Hmotný střed se pohybuje rovnoměrně zrychleně po přímce o rovnici $x_2 = \ell/2 - x_1$ se zrychlením $\vec{a} = (1/2, -1/2, 0)$ m/s². V čase $t = 0$ je v bodě o souřadnicích $[\ell/2, 0, 0]$ m. Rychlost pohybu není zadanými parametry určena.

18. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2}{a^2 + 2ab}.$

19. $F_A = mg/3; F_B = 2 mg/3.$

V tyči a působí tlaková síla o velikosti $F = 4 mg/3 \sqrt{3}$.

20. $F_A = mg \cos \alpha; F_B = mg \sin \alpha,$
 $\cotg 2 \alpha = \operatorname{tg} \vartheta$ neboli $\vartheta = \pi/2 - 2 \alpha.$

21. $\vec{u}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{u}_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{u}_2$
 $\vec{u}_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{u}_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{u}_2$

Všimněte si, že při $m_1 = m_2$ si koule vymění rychlosti ($\vec{u}_1 = \vec{u}_2, \vec{u}_2 = \vec{u}_1$).

Jedná se o přímý centrální ráz dvou koulí, rychlosti před rázem a po rázu budou ležet v jedné přímce. Příklad lze řešit v souřadné soustavě, ve které je koule o hmotě m_2 v klidu, nebo v těžištové souřadné soustavě, a výsledek přetransformovat do původní souřadné soustavy.

22. 1) $\vec{v}_s = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = (5, 25/7, 0)$ cm/s.

2) $\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_s = (35, 25, 0)$ g cm/s.

3) $\vec{P}_0 = 0.$

4) $E_k'/E_k = 0,72.$

5) Pouze pro odpověď na otázku 4.

23. $v_s = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2 k s_0} = 600$ m/s. Ve vzorci je v_s rychlost střely, k koeficient tření a s_0 je dráha, kterou hranol po zasažení střelou urazí na podložce.

24. $v_1 = \sqrt{2g\ell}, v_2 = \sqrt{2g\ell(1-\cos \vartheta)}, v = \frac{m(v_1 + v_2)}{M} = \frac{m}{M} \sqrt{2g\ell} (1 + \sqrt{1-\cos \vartheta}), k = \frac{v + v_2}{v_1} = \frac{m}{M} + \sqrt{1-\cos \vartheta} \frac{m}{M} + 1,$
 $\cos \vartheta^* = 4 Mm / (M + m)^2.$

25. Stlačení pružiny x_0 se vypočítá z rovnice (g je gravitační zrychlení)
 $\frac{1}{2} k x_0^2 + f (M + m) g x_0 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{M + m} v^2 = 0,$

kteřá vystihuje, že kinetická energie bloku těsně po zasažení kuličkou, se spotřebuje na zvýšení potenciální energie pružiny a na práci, kterou blok vykoná pohybem po stole.

$$x_0 = 0,38 \text{ cm.}$$

$$26. I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2; \quad \omega_2 = I_1 \omega_1 / I_2.$$

$$I_2 = 60 \cdot (0,2)^2 / 2 = 1,2 \text{ kg m}^2.$$

$$I_1 = 52 \cdot (0,2)^2 / 2 + 2 [4 \cdot (0,6)^2 / 12 + 4 \cdot (0,5)^2] = 3,3 \text{ kg m}^2.$$

$$\omega_2 = 17,2 \text{ s}^{-1}.$$

27. Označme symboly I_1 , ω_1 , E_{K1} moment setrvačnosti, úhlovou rychlost otáčení a kinetickou energii kotouče a člověka na jeho okraji a symboly $I_2 = I$, ω_2 , E_{K2} analogické veličiny, je-li člověk uprostřed kotouče.

$$\omega_2 = (1 + m R^2 / I) \omega_1;$$

$$E_{K2} - E_{K1} = m R^2 \omega_1^2 (1 + m R^2 / I) / 2.$$

28. Použitím výsledku řešeného příkladu 8. dostanete $F = 10^4 \text{ N}$; $a_0 = 66,7 \text{ m/s}^2$; $a_f = 200 \text{ m/s}^2$; $v_m = 1,1 \cdot 10^3 \text{ m/s}$.

29. $m/m_0 = 14,4$. Pro technické řešení velmi nevýhodný poměr. Jednostupňových raket se pro získání tak velkých rychlostí v_m neuvžívá.

30. Je pouze možno vyjít z rovnice (3) řešeného příkladu 8, kterou je nutno pro zadaný případ řešit samostatně, protože $\vec{F} \neq 0$, $u \neq \text{konst}$, $dm/dt \neq \text{konst}$.

7. Otáčení tuhého tělesa

1. $\overline{x^2} = a^2/4$, $\overline{y^2} = b^2/4$, $\overline{z^2} = c^2/3$, tedy, označíme-li M hmotu tělesa,

$$J_{zz} = M \frac{a^2 + b^2}{4}, \quad J_{xx} = M \left(\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{3} \right), \text{ podobně } J_{yy}.$$

2. $\overline{x^2} = a^2/5$, $\overline{y^2} = b^2/5$, $\overline{z^2} = c^2/5$, tedy např. $J_{zz} = M \frac{a^2 + b^2}{5}$.

3. Dva body o stejné hmotě, odpovídající si navzájem v inverzi (středové souměrnosti) se středem S , mají vzhledem k ose o stejný moment setrvačnosti. Totéž platí tedy o obou polokoulích. Celá koule má moment setrvačnosti (speciální případ předešlé úlohy) $\frac{2}{5} M_k R^2$, každá polokoule tedy $\frac{1}{5} M_k R^2 = \frac{2}{5} M_p R^2$, kde M_k je hmota koule, M_p hmota polokoule.

4. Je vhodné použít válcových souřadnic r, φ, z .

$$J_{zz} = \int_{z=0}^v \int_{r=0}^{Rz/v} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \rho r d\varphi dr dz = 2\pi \rho \int_{z=0}^v \frac{R^4 z^4}{4v^2} dz = \frac{\rho \pi R^4 v}{10}$$

$$\text{Tedy } J_{zz} = M \cdot \frac{3}{10} R^2, \text{ kde hmota kužele } M = \frac{1}{3} \pi R^2 v \rho$$

5. a) $\overline{z^2} = v^{-1} \int_{z=0}^v z^2 \pi \left(\frac{R}{v} z \right)^2 dz = \frac{3}{5} v^2$. Vzhledem k symetrii platí

$$\overline{x^2} = \overline{y^2}, \text{ tudíž dle výsledku úlohy 4 je } \overline{x^2} = \frac{3}{20} R^2. \text{ Tedy např.}$$

$$J_{yy} = M \left(\frac{3}{5} v^2 + \frac{3}{20} R^2 \right) = \frac{3}{20} M (R^2 + 4v^2).$$

b) Těžiště leží na ose z , souřadnici z_s vypočteme podobně jako v úloze 7.

z kap. 6. Plocha $S(\xi)$ řezu rovinou $z = \xi$ je $\pi R^2 \frac{\xi^2}{v^2}$, tedy

$$z_s = \frac{\int z dV}{\int dV} = \frac{\int_0^v z S(z) dz}{\frac{1}{3} \pi R^2 v} = \frac{3}{4} v.$$

Prochází-li osa y' těžištěm $(0, 0, \frac{3}{4} v)$ rovnoběžně s y , je dle Steinerovy věty $J_{yy} = J_{y'y'} + M \cdot (\frac{3}{4} v)^2$, tedy

$$J_{y'y'} = M \left(\frac{3}{80} v^2 + \frac{3}{20} R^2 \right) = \frac{3}{80} M (v^2 + 4R^2).$$

6. Platí $J_{xz} = \int xz dV = 0$ a stejně $J_{yz} = 0$, protože v bodech tělesa $\wedge$ souměrně sdružených podle osy z (x, y, z) a $(-x, -y, z)$ nabývá integrand opačné hodnoty; tedy např. integrál přes poloprostor $x > 0$ je kompenzován integrálem přes poloprostor $x < 0$.

Podobný argument lze v $J_{xy} = \int xy dV$ použít pro body souměrně sdružené dle ro-

viny $x = 0$: (x, y, z) a $(-x, y, z)$. Tvzení pro ostatní tělesa se dokáže stejně.

7. Vezmeme povrchovou přímkou procházející vrcholem $(0, 0, 0)$ ve směru jednotkového vektoru $\vec{n} = (R^2 + v^2)^{-1/2} (0, R, v)$. Použijeme-li hodnot z úloh 4, 5, 6 ve vztahu $J_{\vec{n}} = \sum_{i,k} J_{ik} n_i^1 n_k^1$, vyjde pro žádaný moment

$$J_{\vec{n}} = (R^2 + v^2)^{-1} (R^2 J_{yy} + v^2 J_{zz}) = \frac{3}{20} MR^2 \frac{6v^2 + R^2}{v^2 + R^2}$$

8. Moment setrvačnosti každé z obou úseček délky $b = R\sqrt{\frac{5+1}{2}}$ vzhledem k ose procházející středem úsečky kolmo k nákrešně je $\frac{1}{3} \left(\frac{b}{2}\right)^2$ (speciální případ kvádrů). Moment setrvačnosti vzhledem k ose 0 je $\mu b \left(\frac{1}{3} \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = \frac{\mu b^3}{3}$. Obě úsečky dohromady mají tedy moment setrvačnosti $\frac{2}{3} \mu b^3 = \alpha \mu R^3$, kruhová část $\mu R X R^2$, tedy celkem $\mu R^3(X + \alpha)$, kde $\alpha = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^3 = 1,372$.

9. Je-li rychlost pohybu vádra v , je úhlová rychlost hřídele $\omega = \frac{v}{R}$, její moment setrvačnosti $J_H = \frac{M_H}{2} R^2 = 0,2 \text{ kgm}^2$, její moment hybnosti spolu s klikami $(J_H + J_K) \omega$. Moment hybnosti okovu vzhledem k ose hřídele je $m v R$. Celkový moment sil působících na soustavu je

$$m g R = \frac{d}{dt} [(m R^2 + J_K + J_H) \frac{v}{R}]$$

(v hranatých závorkách celkový moment hybnosti), tedy

$$v = \frac{m g R^2}{m R^2 + J_K + J_H} \cdot t$$

Dráha $s = \frac{m g R^2}{m R^2 + J_K + J_H} \cdot \frac{t^2}{2}$ se po odvinutí provazu rovná $\ell - \ell_1$, tedy

$$t = \sqrt{\frac{m R^2 + J_K + J_H}{m g R^2}} 2(\ell - \ell_1) = 8,14 \text{ s.}$$

Lze též využít zákona zachování energie, jako v úloze 10.

10. Je-li $s = s(t)$ délka odvinutého řetězu v závislosti na čase, je úhlová rychlost rotace $\dot{s}/R$. Kinetická energie vádra s odvinutým řetězem je $(m + \mu s) \cdot (\dot{s})^2/2$, klik a hřídele s navinutým řetězem (dle výsledku úlohy 8)

$$(J_K + J_H + \mu(\ell - s + \alpha R)) (\dot{s}/R)^2/2.$$

Potenciální energie vádra s odvinutým řetězem je $-gms - g\mu \frac{s^2}{2}$, potenciální energie řetězu navinutého na valci včetně zapuštěného konce je $\mu g R^2$ (viz úloha 8 z kap. 6).

Celková energie zůstává konstantní:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{J_K + J_H}{R^2} + m + \mu(\ell + \alpha R) \right) (\dot{s})^2 - gms - g\mu \frac{s^2}{2} + \mu g R^2 = \text{konst} = -g m \ell_1 - g\mu \frac{\ell_1^2}{2} + \mu g R^2$$

V čase $t = 0$ je $s = \ell_1$, $\dot{s} = 0$. Tedy po separaci

$$\int_0^t dt = \sqrt{\frac{J}{g R^2 \mu}} \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s^2 + \frac{2m}{\mu} s - \ell_1^2 - \frac{2m}{\mu} \ell_1}}$$

kde $J = J_H + J_K + m R^2 + \mu R^2 (\ell + \alpha R)$. Pro $t = \tau$ je $s = \ell$ tedy po provedení integrace

$$\tau = \sqrt{\frac{J}{g R^2 \mu}} \operatorname{arccosh} \frac{\mu \ell + m}{\mu \ell_1 + m} = \sqrt{\frac{J}{g R^2 \mu}} \ln \frac{\mu \ell + m + \sqrt{(\mu \ell + m)^2 - (\mu \ell_1 + m)^2}}{\mu \ell_1 + m} = 7,16 \text{ s.}$$

11. Přenos momentu lze uskutečnit silou $F = \frac{D}{R}$, působící tečným směrem v bodě ve vzdálenosti R od osy. Působitě urazí za vteřinu dráhu $S = R\omega$ (ω je úhlová rychlost), přenesený výkon je tedy $P = F \cdot s = D \cdot \omega$ nezávisle na poloměru R .
a) $D = P/\omega = 3,41 \text{ N.m}$,
b) $1 \text{ ks} = 75,9,81 \text{ W}$, tedy $D = 2,51 \text{ N.m}$.

12. Moment setrvačnosti $J = 4M \left(r^2 + \frac{2}{51} R^2 \right)$, kde $R = 7,7 \text{ cm}$ je poloměr koule, $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$. Kinetická energie $\frac{1}{2} J \omega^2 = 300 \text{ J} = F \cdot s$, tedy síla $F = 6 \cdot 10^4 \text{ N} \approx 6 \text{ Mp}$.

13. Konstantní moment silové dvojice $D = 40 \text{ kpm} = 392 \text{ N.m}$ vyvolává úhlové zrychlení $\dot{\omega} = D/J = 1,96 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s}^2$. Úhlová rychlost $\omega = 0,314 \text{ rad/s}$ se tedy změní na nulovou za $t = \frac{\omega}{\dot{\omega}} = 16 \text{ s}$.

14. Pohybová rovnice $J \ddot{\varphi} = -k \varphi$ (φ - stočení, $D = -k \varphi$ silový moment vlákna zkrouceného o úhel φ , $J = 2m \left(\ell^2 + \frac{2}{5} r^2 \right)$ moment setrvačnosti vahadla) má za řešení harmonický pohyb s dobou kyvu $T/2 = \pi \sqrt{\frac{J}{k}} = 839,1 \text{ s} \approx 14 \text{ minut}$.

15. Pohyb je stejný jako v předešlé úloze harmonický; jeho kruhová frekvence je $\omega = 5\pi \text{ rad s}^{-1}$. Moment setrvačnosti je roven rozdílu momentů plného válce a vyříznutých částí; přitom moment setrvačnosti kruhové výseče (vzhledem k ose, procházející středem kolmo k rovině výseče) je při daném poloměru úměrný středovému úhlu. Vyjde $J = 5,56 \cdot 10^{-9} \text{ kg.m}^2$, pak $k = \omega^2 J = 1,37 \cdot 10^{-6} \text{ N.m/rad}$.

16. Pohybová rovnice $J \ddot{\varphi} = -k \varphi - D_T \operatorname{sgn} \dot{\varphi}$ (kde $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ pro $\begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$) má za řešení sinusový průběh $A \sin(\omega t + \psi) + (D_T/k)$ se střední polohou $\varphi = \mp (D_T/k)$ pro $\begin{cases} \dot{\varphi} > 0 \\ \dot{\varphi} < 0 \end{cases}$. Navážeme-li na sebe tato řešení v bodech obratu, kde se znaménko $\dot{\varphi}$ mění, dostaneme řešení znázorněné na obr. 7,5. Označme m -tou krajní výchylku φ_m , je $\varphi_{m+1} = -\varphi_m \pm \frac{2D_T}{k}$; setrvačka se zastaví v první krajní poloze φ_e , pro kterou $|\varphi_e| \leq D_T/k$. V našem případě $\ell = 5$, krajní výchylky jsou postupně 1,57; -1,19; 0,81; -0,53; 0,07 rad; setrvačka vykoná 4 kyvy a v poslední krajní poloze se zastaví.

17. Těsně po pulsu síly (v okamžiku $t = 0$) je rychlost maximální $\omega_{\max}$; pak klesá ($J \dot{\omega} = -D$, tedy $\omega = \omega_{\max} - \frac{D}{J} t$) až před dalším pulsem síly ($t = 1/(2f)$) nabývá minimální hodnoty. Tedy $\omega_{\max} - \omega_{\min} = \frac{D}{J \cdot 2f}$; celkový opsaný úhel musí být roven

$$\int_0^{1/(2f)} \omega dt = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{4f} = \frac{2\pi}{N}.$$

Tedy nerovnoměrnost $\nu = \frac{DN}{8\pi f^2 J}$, $J = \frac{DN}{8\pi \nu f^2} \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ minimálně.

18. Je $\varphi_M = \int_0^t \omega dt = \omega_s t - \frac{\nu}{2n} \cos n\omega_s t$; což dosadíme do pohybové rovnice talíře: $J\ddot{\varphi}_T = -k(\varphi_T - \varphi_M)$. Pro odchylku polohy talíře od rovnoměrného otáčení $\psi = \varphi_T - \omega_s t$ dostáváme rovnici

$$J\ddot{\psi} = -k\psi - k\frac{\nu}{2n} \cos n\omega_s t$$

To je rovnice analogická rovnici pro vynucené harmonické kmity, přičemž poslední člen odpovídá síle, která vyvolává vynucené kmitání. Řešení je (předpokládáme, že vlastní kmity jsou utlumeny)

$$\psi = \frac{k\nu/2n}{Jn^2\omega_s^2 - k} \cos n\omega_s t, \text{ tedy } \dot{\varphi}_T = \omega_s \left(1 - \frac{k\nu/2}{Jn^2\omega_s^2 - k} \sin n\omega_s t\right)$$

a nerovnoměrnost chodu talíře je $\nu' = \frac{\nu}{\frac{Jn^2\omega_s^2}{k} - 1}$

$$\text{Tedy } \nu' = \frac{\nu}{97,7} = 2,05 \cdot 10^{-4}.$$

19. Lze použít zákon zachování energie, jako v úloze 10, nebo vyjít rovnou z pohybové rovnice. Je-li délka lana na jedné straně o 2s větší než na druhé, vyvolává silový moment $D = 2\mu s g R$. Vzdálenost s konce lana od rovnovážné polohy (rovnováha je pro $s = 0$) závisí na čase: $s = s(t)$. Rychlost pohybu lana je $\dot{s}$, tedy moment hybnosti části lana na jedné straně od kladky je $\frac{1}{2}(\ell - \pi R + s)\mu \dot{s} R$, část lana na druhé straně $\frac{1}{2}(\ell - \pi R - s)\mu \dot{s} R$, moment hybnosti kladky s částí lana v drážce $(J + \pi R^2 \mu) \dot{s} / R$. Celkový moment hybnosti soustavy vzhledem k ose kladky je tedy $I = (\mu \ell + \frac{J}{R^2}) \dot{s} R$ a pohybová rovnice ($\frac{dI}{dt} = D$) je lineární:

$$\ddot{s} = \frac{2\mu g}{\mu \ell + \frac{J}{R^2}} s$$

s řešením $s = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}$, $\alpha^2 = \frac{2\mu g}{\mu \ell + \frac{J}{R^2}}$. Pro $t = 0$ je

$$s = s_0 = \ell_1 - \frac{1}{2}(\ell - \pi R) \quad \text{a} \quad \dot{s} = v_0,$$

tedy $2C_1 = s_0 + \frac{v_0}{\alpha}$, $2C_2 = s_0 - \frac{v_0}{\alpha}$. Pro $C_1 > 0$ přepadne lano na jednu, pro $C_1 < 0$ na druhou stranu. Pro $C_1 = 0$ se bude asymptoticky přibližovat rovnovážné poloze, $s = s_0 e^{-\alpha t}$.

20. Doba kyvu $T/2 = \pi\sqrt{J/K}$, moment setrvačnosti $J = 2m_1 \frac{b^2}{4} + 2m_2 \frac{b^2}{12}$, kde $m_1 = \frac{ma}{2a+2b}$, $m_2 = \frac{mb}{2a+2b}$ jsou hmoty delší a kratší strany cívky.

$$\text{Tedy } J = \frac{mb^2}{4} \cdot \frac{3a+b}{3a+3b} = 0,88 \cdot 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{ a doba kyvu } T/2 = 1,57 \text{ s}.$$

21. Pohybová rovnice $J\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + k\varphi = 0$ má za řešení tlumené kmity $\varphi = \varphi_0 e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t$, jsou-li $-\gamma \pm i\omega_1$ komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice. Pro požadovaný útlum $e^{-\gamma \cdot 2\pi/\omega_1} = \frac{1}{20}$ je $\gamma = \frac{\ln 20}{2\pi} \cdot \omega_1$. Ze vztahu $\omega_1^2 + \gamma^2 = k/J$, tedy $\omega_1^2 (1 + (\frac{\ln 20}{2\pi})^2) = k/J$, lze vypočíst ω_1 a rovněž dobu kyvu $T_1/2 = \pi/\omega_1 = 1,74 \text{ s}$. Pro b máme $b = 2J\gamma = 1,515 \cdot 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{rad}$.

22. Moment setrvačnosti kužele vzhledem k ose procházející středem základny kolmo k ose symetrie je dle úlohy 5 a Steinerovy věty $J = M \cdot (\frac{3}{20} R^2 + \frac{3}{80} v^2) + M(\frac{v}{4})^2 \approx M \frac{v^2}{10}$ pro $R \ll v$. Ze zákona zachování energie úhlová rychlost při dopadu $\omega = \sqrt{2J^{-1}Mg \frac{v}{4}}$, tedy lineární rychlost $\omega v = \sqrt{J^{-1}Mg v^3/2} = \sqrt{5g v} \approx 31 \text{ m/s}$. (Symbolem v je značena výška stromu.)

23. Síla H působí na válec v bodě dotyku a proti směru síly F . Celková síla působící na válec $F - H$ se rovná hmotou násobenému zrychlení těžiště: $F - H = M\ddot{s} = MR\ddot{\varphi}$ (s je dráha těžiště, φ úhel otočení válce). Celkový moment sil vzhledem k těžišti $H \cdot R = J\ddot{\varphi}$, kde J je moment setrvačnosti vzhledem k těžišti $J = \frac{M}{2} R^2$. Vyloučením H z předchozích dvou rovnic $F = \frac{3}{2} MR\ddot{\varphi} = \frac{3}{2} M\ddot{s}$ a pohyb je rovnoměrně zrychlený (či zpomalený). Hledaná doba $t = \frac{v_0}{\ddot{s}} \approx 7,5 \text{ s}$. Síla H vyjde $H = F/3 = 3,3 \text{ kp}$.

Poznámka. Nabízí se zde psát pohybovou rovnici přímo ve tvaru $J_0 \ddot{\varphi} = D_0$, kde moment setrvačnosti $J_0 = \frac{3}{2} MR^2$ i silový moment $D_0 = FR$ vnějších sil se bere vzhledem k dotykové přímce o . Vztah v tomto konkrétním případě sice platí, nelze ho však dostat obecně z II. věty impuslové: tam se dosazuje moment hybnosti vzhledem k pevnému bodu. Nelze však nalézt pevný bod, vzhledem k němuž by válec měl moment hybnosti $\frac{3}{2} MR^2 \dot{\varphi}$ během konečného časového intervalu (– nutné pro výpočet časové derivace v II. větě). Uvedený vztah vyžaduje tedy zvláštní ověření, ku příkladu v úloze 30 v této jednoduché podobě obecně neplatí.

24. Lineární zrychlení $a = \frac{F}{M}$ musí odpovídat úhlovému zrychlení $\ddot{\varphi} = \frac{D}{J}$ dle vztahu $a = R\ddot{\varphi}$. Přitom $D = F \cdot d$ je moment síly vzhledem k těžišti, d vzdálenost přímky, ve které síla působí, od těžiště, $J = \frac{1}{2} MR^2$ moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm. Tedy výška působistě síly $d = \frac{J}{MR} = \frac{R}{2}$.

25. Pohybuje-li se vozík rychlostí $\dot{x}$ (x je dráha ve směru nakloněné roviny), je úhlová rychlost kol $\frac{\dot{x}}{R}$. Celkovou kinetickou energii T lze složit z kinetické energie těžiště $\frac{1}{2} M \dot{x}^2$ a z kinetické energie vzhledem k těžišťové vztažné soustavě $\frac{1}{2} \cdot 4J \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2$. Potenciální energie $V = Mg x \sin \alpha$, tedy

$$T + V = \frac{1}{2} \left(M + \frac{4J}{R^2}\right) \dot{x}^2 + Mg x \sin \alpha. \quad x = \text{konst.}$$

Rovnici splňuje rovnoměrně zrychlený pohyb $x = -\frac{1}{2} a t^2$ se zrychlením $a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{4J}{MR^2}}$.

26. Ve směru tečném k nakloněné rovině působí na válec síla, jejíž velikost je $Mg \sin \alpha - T$. Její působíště leží v ose válce, tedy vztah pro lineární zrychlení a je stejný jako v úloze 23:

$$\left(M + \frac{J}{R^2}\right) a = Mg \sin \alpha - T$$

Tečná složka váhy kvádrů je $M'g \sin \alpha$, síla tření $M'g \cos \alpha \cdot f$, pro pohyb kvádrů tedy

$$M'a = M'g \sin \alpha - M'g \cos \alpha \cdot f + T$$

Z těchto dvou rovnic zrychlení

$$a = \frac{(M + M') g \sin \alpha - M'g \cos \alpha \cdot f}{M + M' + \frac{J}{R^2}}$$

(je-li $f < (1 + \frac{M}{M'}) \tan \alpha$, jinak se soustava nepohybuje.) Namáhání táhla

$$T = \frac{M + \frac{J}{R^2} M'g \cos \alpha \cdot f - \frac{J}{R^2} M'g \sin \alpha}{M + M' + \frac{J}{R^2}}$$

je tahem pro $f > \frac{\tan \alpha}{1 + \frac{MR^2}{J}}$, tlakem pro opačnou nerovnost.

Tečná síla F mezi válcem a rovinou, která se bude rovnat nejvýše $Mg \varphi \cos \alpha$, má vzhledem k těžišti válce moment $R \cdot F$ a vyvolává úhlové zrychlení válce $\frac{a}{R}$, je tedy $F = \frac{J \cdot a}{R^2}$. Má-li se válec skutečně valit, musí koeficient tření splňovat

$$\varphi \geq \frac{J \cdot a}{MR^2 g \cos \alpha} = \frac{J}{MR^2} \frac{(M + M') \tan \alpha - M'f}{M + M' + \frac{J}{R^2}}$$

27. Řešení je obdobné řešenímu příkladu 4 s $\gamma = 0$. Osa rotace zde však prochází dotykovými body koule s hranami líhy. Tedy vzdálenost těžiště od osy rotace $d = R\sqrt{3}/2$, moment setrvačnosti $J = 2MR^2/5 + M(R\sqrt{3}/2)^2 = 23MR^2/20$. Výpočtem získáme $s = (15/23) g \sin \alpha \cdot t^2/2 = 1,6 \text{ m}$.

28. Střed souřadné soustavy nechť souhlasí s okamžitou polohou těžiště válce, osa x směřuje vodorovně směrem od povrchu desky kolmo k vrstevnicím, osa z svisle nahoru. Působí-li ve styku s deskou na válec síla $\vec{F} = (F_x, 0, F_z)$, pak zrychlení desky (působí na ni reakce $-\vec{F}$) je $a = -F_x/m$ a moment sil vzhledem k těžišti válce

$$(\vec{r} \sin \alpha, 0, -R \cos \alpha) \times (F_x, 0, F_z) = (0, R(F_z \sin \alpha - F_x \cos \alpha), 0) = J(0, \ddot{\varphi}, 0),$$

kde φ je úhel otočení válce, J jeho moment setrvačnosti vzhledem k těžišti. Součet sil působících na válec rovná se M -násobku zrychlení jeho těžiště:

$$(F_x, 0, F_z - Mg) = M(R\ddot{\varphi} \cos \alpha + a, 0, -R\ddot{\varphi} \sin \alpha).$$

Do posledního vztahu lze dosadit za $\ddot{\varphi}$ z předposledního

$$\ddot{\varphi} = \frac{R}{J} (F_z \sin \alpha - F_x \cos \alpha)$$

a za $a = -F_x/m$; získané rovnice pro F_x, F_z

$$F_x \left(1 + \frac{M}{m} + \frac{MR^2}{J} \cos^2 \alpha\right) - F_z \cdot \frac{MR^2}{J} \cos \alpha \sin \alpha = 0$$

$$-F_x \frac{MR^2}{J} \cos \alpha \sin \alpha + F_z \left(1 + \frac{MR^2}{J} \sin^2 \alpha\right) = Mg$$

dávají po vyřešení

$$F_x = \frac{Mg \frac{MR^2}{J} \cos \alpha \sin \alpha}{1 + \frac{M}{m} + \frac{MR^2}{J} (1 + \frac{M}{m} \sin^2 \alpha)} = \frac{Mg 2 \cos \alpha \sin \alpha}{\frac{M}{m} (1 + 2 \sin^2 \alpha) + 3}$$

Vozíček se tedy pohybuje se zrychlením o velikosti:

$$|a| = \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha}{1 + 2 \sin^2 \alpha + \frac{3m}{M}} g \text{ proti směru osy } x.$$

29. Těžiště kužele při valení kužele opisuje kružnici rovnoběžnou s nakloněnou rovinou ve vzdálenosti $d = \frac{3}{4} \frac{Rv}{\sqrt{R^2 + v^2}}$ od roviny; její poloměr je

$$r = \frac{3}{4} \frac{v^2}{\sqrt{R^2 + v^2}}$$

Pohybuje-li se po ní těžiště rychlostí $\dot{s}$ (s je vzdálenost od dolní rovnovážné polohy, měřená podél kružnice), je úhlová rychlost rotace kužele kolem okamžité osy (dotyková přímka) $\dot{s}/d$, kinetická energie tedy $\frac{1}{2} J \left(\frac{\dot{s}}{d}\right)^2$, kde J je moment setrvačnosti kužele kolem povrchové přímky (úloha 7). Potenciální energie je $-Mg r \sin \alpha \cos \frac{s}{r} + \text{konst}$, pro $\cos \frac{s}{r} \sim 1 - \frac{s^2}{2r^2}$ lze psát rovnici

$$\frac{1}{2} J \left(\frac{\dot{s}}{d}\right)^2 + Mg \sin \alpha \frac{s^2}{2r} = C \quad (C \text{ je konstanta}),$$

kterou splňují harmonické kmity o frekvenci $\omega/2\pi =$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Mgd^2 \sin \alpha}{Jr}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{v^2 + R^2}}{6v^2 + R^2}} \cdot 5g \sin \alpha$$

30. Střed koule S , těžiště T a bod dotyku D zůstávají dle předpokladu stále v jediné svislé rovině ρ (v obr. 7, 10 rovina nákrešny).

Vzdálenost $\overline{ST} = h = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \cdot \frac{3}{8} R$ (úloha 7 z kap. 6).

Potenciální energie při otočení koule o úhel φ z rovnovážné polohy je tedy $-Mgh \cos \varphi$. Vedeme-li body S, T, D osy kolmo k ρ , platí pak pro příslušné momenty setrvačnosti $J_S = \frac{2}{5} MR^2$ (úloha 3), $J_T = J_S - Mh^2$, $J_D = J_T + M \cdot \overline{TD}^2$, kde pro vzdálenost $\overline{TD}$ z kosinové věty $\overline{TD}^2 = R^2 + h^2 - 2Rh \cos \varphi$. Tedy $J_S = \frac{7}{5} MR^2 - 2MRh \cos \varphi$ a kinetická energie je $\frac{1}{2} J_D \dot{\varphi}^2$. Rovnice zachování energie

$$\left(\frac{7}{5} MR^2 - 2MRh \cos \varphi\right) \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - Mgh \cos \varphi = -Mgh \cos \varphi_0$$

(kde φ_0 je maximální výchylka)

se dá přepsat pro malé rozkyvy φ

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{R} \frac{\cos \varphi - \cos \varphi_0}{\frac{7}{5} \frac{R}{h} - \cos \varphi_0} \sim \frac{g}{R} \left(\frac{1 - \cos \varphi_0}{\frac{7}{5} \frac{R}{h} - 2} - \frac{\frac{7}{5} \frac{R}{h} - 2 \cos \varphi_0}{\left(\frac{7}{5} \frac{R}{h} - 2\right)^2} \cdot \frac{\varphi^2}{2} \right)$$

(rozvoj v Maclaurinovu řadu). Pro dobu kyvu máme

$$T/2 = \pi \sqrt{\frac{R \left(\frac{7}{5} \frac{R}{h} - 2 \right)^2}{g \left(\frac{7}{5} \frac{R}{h} - 2 \cos \varphi_0 \right)}},$$

což ovšem platí jen pro malé φ_0 , kdy $\cos \varphi_0 \sim 1$.

Tedy

$$T/2 = \pi \sqrt{\frac{R}{g} \left(\frac{7}{5} \frac{R}{h} - 2 \right)} = \pi \sqrt{\frac{R}{g} \left(\frac{56}{15} \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} - 2 \right)} = 0,547 \text{ s.}$$

$$31. \text{ Doba kyvu fyzického kyvadla je } T/2 = \pi \sqrt{\frac{J}{Mgx}} = \pi \sqrt{\frac{J_T}{Mgx} + \frac{x}{g}},$$

kde M je hmota kyvadla, J moment setrvačnosti pro osu kývání procházející bodem závěsu. J_T moment setrvačnosti pro rovnoběžnou osu procházející těžištěm a x vzdálenost bodu závěsu od těžiště. V našem případě lze J_T vypočíst třeba jako rozdíln momentů setrvačnosti obdélníkové desky a vyříznutého vnitřku; výsledek lze upravit na tvar

$$J_T = \frac{M}{12} [(a+b-2v)^2 + 4v^2] = 2,46 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Dále $2x = b + \sqrt{\ell^2 - a^2} = 0,5 \text{ m}$, tedy vyjde $T/2 = 0,592 \text{ s}$.

32. Doba kyvu fyzického kyvadla v závislosti na poloze bodu závěsu nabývá minima, je-li minimální odmocnina ve vztahu pro $T/2$, tedy pro $x^2 = J_T/M$ (x rovné polo-měru setrvačnosti vzhledem k těžišti). V našem případě $x = 0,158 \text{ m}$, tj.

$$\ell = \sqrt{(2x-b)^2 + a^2} = 41,6 \text{ cm a minimální doba kyvu vychází } T/2 = \pi \sqrt{\frac{2x}{g}} = 0,562 \text{ s.}$$

33. Zavedeme novou souřadnou soustavu, otočenou vůči původní okolo osy z o úhel φ tak, že osa x' má směr vektoru $\vec{n}$. Transformace souřadnic

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \\ z &= z' \end{aligned}$$

dovoluje transformovat složky tenzoru setrvačnosti do soustavy x', y', z' , kterou tvoří hlavní osy setrvačnosti. Zvláště

$$J_{xy} = - \int xy \, dm = \sin \varphi \cos \varphi \left(\int y'^2 \, dm - \int x'^2 \, dm \right) + (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \int x' y' \, dm.$$

Deviační momenty jsou v hlavních osách setrvačnosti nulové. Tedy

$$J_{xy} = (J_{x'x'} - J_{y'y'}) \sin \varphi \cos \varphi,$$

kam lze ještě dosadit za hlavní momenty setrvačnosti

$$J_{x'x'} = \frac{2}{5} M b^2, \quad J_{y'y'} = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2),$$

tedy

$$J_{xy} = \frac{M}{5} (b^2 - a^2) \sin \varphi \cos \varphi.$$

34. Úvaha je stejná jako v řešeném příkladu 7; místo momentu sil tíže však zde působí moment D_z z řešeného příkladu 6, kde $\varphi = 90^\circ - \psi = 66 \frac{1}{2}^\circ$. Tedy

$$\Omega = \frac{3 \mathcal{M}_s}{r_{zs}^3} \cdot \frac{\frac{1}{5} (b^2 - a^2) \cos \psi}{J_{x'x'} \omega} = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{M}_s}{r_{zs}^3} \frac{b^2 - a^2}{b^2} \frac{\cos \psi}{\omega}$$

Druhý zlomek v posledním výrazu je přibližně roven jako v úloze 12 z kap. 5 kvadrátu střední úhlové rychlosti oběhu Země $(2\pi/1 \text{ rok})^2$, $2\pi/\omega$ je rovno jednomu hvězdnému dni. Výsledek $\Omega = 24,7 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi(\text{rok})^{-1}$. V době rovnodennosti je ovšem silový moment slapových sil od Slunce, a tedy i úhlová rychlost precese nulová. Bližší rozbor ukazuje, že výsledná střední rychlost během roku se rovná polovině vypočtené hodnoty: $12,3 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi(\text{rok})^{-1}$. Započteme-li ještě vliv Měsíce, který vyvolává 2,17x větší slapovou sílu i precesi, dostáváme pro celkovou úhlovou rychlost (tzv. lunisolární precese) $39 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi(\text{rok})^{-1}$, což odpovídá době oběhu 25 600 let. Skutečná hodnota činí asi 25 800 let.

35. Kladný směr osy x nechť směřuje na východ, y na sever a z vzhůru. Země rotuje s úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}_0 = (0, \Omega_0, 0)$. V případě a) je toto současně úhlová rychlost $\vec{\Omega}$ rámečku se setrvačnickem, v případě b) přistupuje otáčení rámečku: $\vec{\Omega} = (0, \Omega_0, \Omega_1)$. Vektor momentu hybnosti setrvačnicku $\vec{I}$ má velikost $J\omega = \frac{1}{2} MR^2\omega$ a směr osy; při uvedeném otáčení je časová derivace tohoto vektoru

$$\vec{D} = \frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{I},$$

kam dosadíme okamžitou hodnotu $\vec{I} = (J\omega, 0, 0)$. Moment působící na setrvač-ník je $\vec{D} = J\omega(0, \Omega_1, -\Omega_0)$. Reakce $-\vec{D}$, kterou setrvačnick působí na rámeček, má dvě složky:

z -ová složka $J\omega\Omega_0 = 0,34 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}$ stáčí rámeček v případě a) i b) a y -ová složka (podstatně větší) $J\omega\Omega_1 = 3 \text{ N.m}$ zachycovaná ložisky rámeč-ku, přistupuje v případě b).

36. Počátek souřadné soustavy položíme do pevného bodu setrvačnicku U . Osa setrvač-níku nechť koná precesi kolem osy z , přičemž s ní svírá úhel ψ . V okamžiku, kdy prochází rovinou xz , je celková úhlová rychlost setrvačnicku $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$, kde $\vec{\omega} = (\omega \sin \psi, 0, \omega \cos \psi)$ je úhlová rychlost rotace setrvačnicku kolem vlastní osy, $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ rychlost precese. Celkový moment hybnosti (složky $I_i = \sum J_{ik} (\vec{\omega} + \vec{\Omega})_k$ se nejlépe vypočte rozkladem $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$ do smě-rů hlavních os momentu setrvačnosti. Pak se každá složka násobí příslušným hlavním momentem.

Směru osy setrvačnicku, s jednotkovým vektorem $\vec{n} = (\sin \psi, 0, \cos \psi)$, odpovídá moment setrvačnosti J , složka $\vec{n} \cdot (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) = \omega + \Omega \cos \psi$ dá po znásobení J příspěvek k $\vec{I}$:

$$J(\omega + \Omega \cos \psi) \cdot \vec{n}.$$

Podobně postupujeme pro směr kolmý s jednotkovým vektorem $\vec{n}' = (-\cos \psi, 0, \sin \psi)$. Odpovídající moment setrvačnosti (vzhledem k počátku) označíme J' .

Celkový moment hybnosti

$$\vec{I} = (\omega J \sin \psi + \Omega (J - J') \cos \psi \sin \psi, 0, \omega \cos \psi + \Omega (J \cos^2 \psi + J' \sin^2 \psi))$$

se otáčí rovnoměrně kolem osy z úhlovou rychlostí Ω . Tedy jeho časovou derivaci můžeme napsat jako $\vec{\Omega} \times \vec{I}$. Tato časová derivace je rovna celkovému momentu sil

$$\vec{D} = \vec{\Omega} \times \vec{I} = (0, \Omega \omega J \sin \psi + \Omega^2 (J - J') \cos \psi \sin \psi, 0)$$

37. Použijeme-li v řešeném příkladu 7 moment setrvačnosti $J = \frac{3}{10} MR^2$ (úloha 4) a vzdálenost těžiště od vrcholu $h = \frac{3}{4} v$, máme výsledek

$$\omega = \frac{5}{2} \frac{g \cdot v}{R^2 \Omega} = 294,3 \text{ rad s}^{-1}, \text{ tedy } 46,8 \text{ otáček za vteřinu.}$$

Položíme-li velikost momentu z minulého příkladu rovnu momentu síly tíže $Mgh \sin \psi$, je s použitím výrazu z úlohy 5 pro J'

$$\omega = \frac{5}{2} \frac{g \cdot v}{R^2 \Omega} - \frac{\Omega}{2} (1 - 4 \frac{h^2}{R^2}) \cos \psi = 298,4 \text{ rad s}^{-1}, \text{ tedy}$$

47,5 otáček za vteřinu.

38. Osa rotační symetrie disku protíná svislou osu kružnice k v bodě U . Tento bod, bereme-li ho jako pevně spojený s diskem, zůstává v klidu. Dalším bodem disku s nulovou okamžitou rychlostí je bod T , tedy okamžitá osa rotace je TU . Herpolodiový kužel má vrchol v bodě U a za základnu kružnici k , polhodiový kužel též vrchol a za základnu obvod disku.

39. Těžiště disku se pohybuje po kružnici poloměru $r = R \cos \alpha$ úhlovou rychlostí v/r . Součet všech na disk působících vnějších sil musí tedy být

$$(-M(\frac{v}{r})^2 [r - R \cos \alpha], 0, 0), \text{ tudíž v bodě } T \text{ na disk působí od podložky}$$

síla $(-M \frac{v^2}{r^2} [r - R \cos \alpha], 0, Mg)$ s momentem (vzhledem k těžišti disku)

$$\vec{D} = (0, M \frac{v^2}{r^2} [r - R \cos \alpha] \cdot R \sin \alpha - Mg R \cos \alpha, 0).$$

Úhlovou rychlost lze složit např. z rychlosti $(0, 0, \frac{v}{r})$ rotace kolem osy US a z rychlosti $(-\frac{v}{R} \sin \alpha, 0, -\frac{v}{R} \cos \alpha)$ rotace disku kolem vlastní osy. Součet $(-\frac{v}{R} \sin \alpha, 0, -\frac{v}{R} \cos \alpha + \frac{v}{r})$ (přesvědčte se, že má směr přímky UT) se rozloží do hlavních os tenzoru setrvačnosti disku, násobí příslušnými momenty setrvačnosti a složí. Získáme moment hybnosti

$$\vec{I} = (\frac{v}{r} \cos \alpha \sin \alpha (J - J') - \frac{v}{R} J \sin \alpha, 0, \frac{v}{r} (J \cos^2 \alpha + J' \sin^2 \alpha) - \frac{v}{R} J \cos \alpha),$$

kde J je moment setrvačnosti disku vzhledem k jeho ose rotační symetrie, J' vzhledem k ose procházející středem disku a ležící v jeho rovině. Vektor $\vec{I}$ se při pohybu otáčí okolo osy US úhlovou rychlostí $\frac{v}{r}$. Jeho časová derivace

$$(0, 0, \frac{v}{r} \times \vec{I} = (0, \frac{v^2}{r^2} [\cos \alpha \sin \alpha (J - J') - \frac{r}{R} J \sin \alpha], 0)$$

se musí rovnat silovému momentu $\vec{D}$. Tuto podmínku lze upravit na vztah

$$v^2 = \frac{r^2 g \cotg \alpha}{r - R \cos \alpha + \frac{J}{MR^2} r - \frac{J - J'}{MR} \cos \alpha} = \frac{gr^2 \cotg \alpha}{\frac{3}{2} r - \frac{5}{4} R \cos \alpha}$$

(Dosadili jsme $J = \frac{1}{2} MR^2$, $J' = MR^2$.)

Z něho plyne $v = 0,642 \text{ m/s}$.

40. První případ se řeší stejně jako minulá úloha, ale odpadá nyní rychlost rotace disku kolem vlastní osy. Celková úhlová rychlost je tedy $(0, 0, \frac{v}{r})$, což konečnou podmínku mění na

$$v^2 = \frac{r^2 g \cotg \alpha}{r - R \cos \alpha - \frac{J - J'}{MR} \cos \alpha} = \frac{r^2 g \cotg \alpha}{r - \frac{5}{4} R \cos \alpha};$$

pak $v = 0,805 \text{ m/s}$.

Konečně za posledního předpokladu musí být moment síly vzhledem k těžišti $\vec{D}$, který vyjde úplně stejně jako dříve, nulový.

Z toho

$$v^2 = \frac{r^2 g \cotg \alpha}{r - R \cos \alpha}, \text{ pak } v = 0,793 \text{ m/s.}$$

8. Pružnost a základy reologie

1. a) Smyk lze popsat tak, že pouze jedna složka, a to smyková (např. $\tau_{12} = \tau_{21}$) tenzoru napětí je nenulová.

Z podmínky $\tau_{ij} \nu_j = \nu_i \tau$ (viz řešený příklad 2) plynou pro složky jednotkových vektorů ν_i ve směru hlavních os tenzoru napětí rovnice

$$\tau_{12} \nu_2 = \tau_{21} \nu_1 = \nu_2 \tau; 0 = \nu_3 \tau$$

Z nich plyne $\nu^I (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0); \nu^{II} (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0); \nu^{III} (0, 0, 1)$, kde ν^I, ν^{II} a ν^{III} jsou označeny jednotkové vektory ve třech hlavních směrech. Vektoru ν^I odpovídá velikost hlavního napětí $\tau^I = \tau_{12}$ (tah), vektoru ν^{II} napětí $\tau^{II} = -\tau_{12}$ (tlak), vektoru ν^{III} napětí $\tau^{III} = 0$.

b) Tenzor $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$. Z parciálních derivací $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ je v zadaném případě nenulová pouze $\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$. Ze složek tenzoru D_{ij} jsou nenulové pouze $D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$. Způsobem analogickým tomu, který byl použit v části a) řešení, lze i zde dokázat, že dva hlavní směry tenzoru leží v rovině x_1, x_2 a půlí úhly mezi osami x_1 a x_2 a třetí hlavní směr je kolmý k rovině x_1, x_2 .

2. Pro vektor napětí T_i působící na ploše s normálou ν_j platí vyjádření

$$T_i = \tau_{ij} \nu_j \quad (1)$$

Dosazením do (1) dostáváme $T_1 = \tau_{11} \nu_1 + \tau_{12} \nu_2 + \tau_{13} \nu_3 = (500/2 + 500/2 + 800/\sqrt{2}) \text{ N/m}^2 = 1066 \text{ N/m}^2$ a obdobným postupem dostaneme $T_2 = -280 \text{ N/m}^2$ a $T_3 = -187 \text{ N/m}^2$. Vektor napětí $\vec{T} = (1066, -281, -187) \text{ N/m}^2$. Velikost napětí $|\vec{T}| = 1118 \text{ N/m}^2$, normálové napětí $T_{\perp} = T_1 \nu_1 = 260 \text{ N/m}^2$ a tečné napětí $T_{\parallel} = \sqrt{|\vec{T}|^2 - T_{\perp}^2} = 1087 \text{ N/m}^2$.

3. Největší relativní prodloužení nastane v jednom z hlavních směrů tenzoru. Postupem užitým v 2. řešeném příkladě a zjednodušeném pro rovinný případ (dvě souřadnice, proměnný index nabývá pouze hodnot 1 a 2) zjistíme, že první hlavní směr tenzoru svírá s osou x_1 souřadné soustavy úhel 30° a deformace v tomto směru $e_1 = 1 \cdot 10^{-3}$. Druhý hlavní směr tenzoru je k tomuto směru kolmý a deformace v něm $e_2 = -1 \cdot 10^{-3}$ (relativní zkrácení). Deformace e_1 je největším relativním prodloužením a směr svírající s osou x_1 úhel 30° směrem, ve kterém největší prodloužení nastane.

4. Uvažujeme homogenní, tj. v každém bodě stejnou deformaci vzorku. Vyjádříme invariant e_I v soustavě souřadné proložené hlavními osami tenzoru deformace $e_I = e_1 + e_2 + e_3$, kde e_1, e_2 a e_3 jsou hlavní deformace. Uvažujeme v deformovaném tělese kvádr objemu V o stranách ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 rovnoběžných se směrem hlavních os tenzoru deformace. Tento kvádr před deformací byl též kvádrem (vhodná volba soustavy souřadné) a délky jeho stran byly $\ell_{01}, \ell_{02}, \ell_{03}$ a ob-

jem V_0 . Jelikož např. $e_1 = \Delta \ell_1 / \ell_1 = (\ell_1 - \ell_{01}) / \ell_1$ a tedy $\ell_1 = \ell_{01} (1 + e_1)$, můžeme pro objem V psát

$$V = \ell_1 \ell_2 \ell_3 = \ell_{01} \ell_{02} \ell_{03} (1 + e_1) (1 + e_2) (1 + e_3)$$

a zanedbáme-li součiny dvou a tří složek deformace, což je v souladu s teorií malých deformací, můžeme psát

$$V \approx V_0 (1 + e_1 + e_2 + e_3) = V_0 + V_0 e_I$$

Odtud plyne, že $e_I = (V - V_0) / V_0$ značí relativní změnu objemu způsobenou deformací.

5. Abychom zjistili objemovou stlačitelnost, budeme předpokládat, že těleso je podrobeno hydrostatickému tlaku p (např. ponoříme těleso do válce naplněného kapalinou a pístem nastavíme určitou hodnotu tlaku p). Potom pro složky tenzoru napětí platí $\tau_{ij} = -\delta_{ij} p$, tj. $\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = -p$; $\tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$. Z Hookova zákona $\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_I + 2\mu e_{ij}$, pak pro složky tenzoru deformace dostáváme $e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0$. Pro první invariant tenzoru deformace e_I , sečteme-li rovnice Hookova zákona pro složky τ_{11}, τ_{22} a τ_{33} , dostaneme

$$e_I = -p / (\lambda + 2\mu/3).$$

Výsledek minulé úlohy dává $e_I = (V - V_0) / V_0$.

Porovnáním obou vyjádření pro e_I dostaneme vztah mezi tlakem p a objemem V

$$\frac{-p}{\lambda + 2\mu/3} = \frac{V - V_0}{V_0},$$

z kterého můžeme určit hodnotu dp/dV vyskytující se v definičním vztahu pro K . Po dosazení dostaneme hledané vyjádření pro modul objemové pružnosti

$$K = -V_0 \frac{dp}{dV} = \lambda + 2\mu/3$$

6. Je možno použít např. následující postup. Z výsledku řešeného příkladu 3 víme, že $E = G(3\lambda + G) / (\lambda + G)$ a $\sigma = \lambda/2 (\lambda + G)$, kde jsme užili vztahu $\mu = G$ uvedeného v poznámce k řešenému příkladu 3. Z výsledku úlohy 5 plyne pro $K \rightarrow \infty$ buď $\lambda \rightarrow \infty$ nebo $\mu = G \rightarrow \infty$. Příklad $G \rightarrow \infty$ má za následek i $E \rightarrow \infty$, což by znamenalo nejen objemově, ale i tvarově tuhé těleso. Tento případ nedáme uvažovat a zůstává tedy pouze možnost $\lambda \rightarrow \infty$.

Potom pro nestlačitelnou látku dostáváme

$$a) E = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} = 3G$$

$$b) \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} = 1/2$$

c) Rovnice Hookova zákona, ve kterých se vyskytuje člen λe_I , nelze užít, protože tento výraz je neurčitý typu $\infty \cdot 0$. Místo těchto rovnic lze však psát rovnice

$$\tau_{11} = 2\mu e_{11} - p; \tau_{22} = 2\mu e_{22} - p; \tau_{33} = 2\mu e_{33} - p,$$

které respektují skutečnost, že v nestlačitelné látce jsou složky napětí $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$ určeny až na konstantu typu hydrostatického tlaku p společnou pro všechny body uvažovaného tělesa. Např. pro tah dávají shora uvedené rovnice

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= 2 G e_{11} - p, \\ 0 &= 2 G e_{22} - p, \\ 0 &= 2 G e_{33} - p,\end{aligned}$$

z kterých, s uvažováním podmínky $e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0$ a symetrického vztahu $e_{22} = e_{33}$, plyne $p = -G e_{11}$ a tedy $\tau_{11} = 3 G e_{11}$. Poslední vztah je ve shodě s relací $E = 3 G$.

$$7. \Delta l = 0,23 \text{ mm}; \Delta a = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}; \Delta b = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ mm}; \Delta V = 4 \text{ mm}^3.$$

$$8. \tau = -E \alpha (t_2 - t_1) / (1 + \alpha t_1); \text{ je-li } t_1 \text{ blízké } 0^\circ \text{ C, platí přibližný vztah } \tau = -E \alpha (t_2 - t_1). \text{ Pro zadané číselné hodnoty } \tau = 1140 \text{ kp/cm}^2 \text{ (tah).}$$

9. a) Uvažujeme bod ležící ve vzdálenosti r od osy válce. Jeho souřadnice jsou $x_1 = r \cos \vartheta$, $x_2 = r \sin \vartheta$, kde ϑ je úhel mezi kladným směrem osy x_1 a kolmicí vedenou z vyšetřovaného bodu na osu válce. Při torzi se průřez, v kterém se nachází vyšetřovaný bod, pootočí o úhel γ a jeho nové souřadnice budou $y_1 = r \cos (\vartheta + \gamma)$, $y_2 = r \sin (\vartheta + \gamma)$. Posunutí $u_1 = y_1 - x_1$; tedy $u_1 = r \cos (\vartheta + \gamma) - r \cos \vartheta$, $u_2 = r \sin (\vartheta + \gamma) - r \sin \vartheta$, $u_3 = 0$. Předpokládáme-li, ve shodě s lineární teorií pružnosti, že γ je velmi malé, můžeme psát

$$u_1 = -\gamma r \sin \vartheta = -\alpha x_2 x_1 \text{ a } u_2 = \gamma r \cos \vartheta = \alpha x_1 x_2.$$

V těchto výrazech jsme za γ dosadili αx_2 ; předpokládáme tedy, že průřez s nulovou souřadnicí x_3 , např. spodní základna válce, není stočen. Pro složky

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ dostáváme}$$

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{12} = 0,$$

$$e_{13} = -\alpha x_2, e_{23} = \alpha x_1$$

a z nich dle Hookova zákona

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{12} = 0,$$

$$\tau_{13} = -G \alpha x_2, \tau_{23} = G \alpha x_1 \quad (G \dots \text{modul pružnosti ve smyku}).$$

b) Napětí τ_1 působící v průřezu válce vypočteme dle vztahu $\tau_1 = \tau_{ij} \nu_j$, kde vektor ν_j má složky $(0, 0, 1)$. Dostaneme $\tau_1 = -G \alpha x_2$, $\tau_2 = G \alpha x_1$, $\tau_3 = 0$. Vektor τ_1 leží tedy v rovině průřezu -smykové napětí, je kolmý k poloměru a jeho velikost $\tau = G \alpha r$. Pro moment síly M dostáváme tak vyjádření

$$M = \int_s \tau r \, ds = \int_0^{2\pi} \int_0^R 6 \alpha r^3 \alpha \vartheta \, dr = \pi 6 \alpha R^4 / 2.$$

Moment této velikosti musí působit v opačném smyslu v obou podstavách válce, aby nastalo jejich vzájemné otočení o úhel $\varphi = \alpha \ell$. Tedy

$$M = \pi G R^4 \varphi / 2 \ell$$

10. Pro válec napíšeme pohybovou rovnici pro otáčení kolem osy $I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M^0$. Moment setrvačnosti kolem osy válce $I = \pi r^2 / 2$. Stočíme-li drát o úhel φ z je-

ho rovnovážné polohy (na obr. 8,1 je úhel φ naznačen jako úhel mezi přímkou pevnou v prostoru P a přímkou pevnou ve válci a ; v rovnovážné poloze $a \equiv P$), působí drát na válec momentem síly $M^0 = -k \varphi$, kde $k = \pi G R^4 / 2 \ell$, jak plyne z výsledku minulé úlohy. Pohybová rovnice pro pohyb torzního kyvadla má potom tvar $I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -k \varphi$, odkud plyne

$$\varphi = \phi_0 \sin (\omega t + \alpha);$$

$\omega = \sqrt{k/I}$ a ϕ_0, α jsou konstanty dané počátečními podmínkami. Doba kmitu $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{I/k} = (2/R^2)\sqrt{\pi m r^2 \ell / G}$. Číselně $T = 7,0 \text{ s}$.

11. Pro velikost smykového napětí τ ve vzdálenosti r od osy válce je v úloze 9 odvozen vzorec $\tau = G \alpha r$ a pro moment síly M působící torzi výraz $M = \pi G \alpha R^4 / 2$. Největší smykové napětí τ_m je u pláště válce a má hodnotu $\tau_m = G \alpha R$. Položíme-li $\tau_m = \tau_0$, můžeme pro největší přípustný moment síly psát $M_m = \pi \tau_0 R^3 / 2$, číselně $M_m = 15,4 \cdot 10^3 \text{ N.m}$.

12. Z rovnice $\eta \frac{de}{dt} + Ee = \tau$, pro případ $\tau = \tau_0$ a počáteční podmínku $e = 0$ při $t = 0$, plyne $e = (\tau_0/E) [1 - \exp(-Et/\eta)]$. Mezní deformace $e_m = \tau_0/E$ a $e_1 = 9\tau_0/10 E$. Dosadíme-li e_1 do rovnice pro e , dostaneme pro čas t_1 po úpravě podmínku $1/10 = 1/\exp(Et_1/\eta)$, neboli $t = (\eta/E) \ln 10$. Číselně $t = 15,3 \text{ s}$.

9. Mechanika tekutin

1. Celková váha G je rovná váze objemu V_0 kapaliny o hustotě ρ_2 : $G = \rho_2 V_0 g = 4,1 \cdot 10^{-2} \text{ N}$. Celkový objem (včetně trubičky) $V = \frac{G}{\rho_1 g} = 4 \text{ cm}^3$, tedy $q = (V - V_0) / \ell = 0,2 \text{ cm}^2$.
2. Je-li část αV z objemu kuličky V ponořena do rtuti, je vztlaková síla na tuto část $\alpha V \rho_R g$, vztlaková síla na zbytek objemu $(1 - \alpha) V \rho_v g$, součet se rovná váze $V \rho_0 g$. Tedy $\alpha = \frac{\rho_0 - \rho_v}{\rho_R - \rho_v} = 0,54$.
3. $a_1 = a \sqrt{\rho_1 / \rho} = 12,5 \text{ cm}$;
 $M = \rho_1 g v a^2 (a - a_1) / 6 = 0,19 \text{ N.m}$; při pohledu naznačeném na obr. 9,3 působí moment M proti směru hodinových ručiček.
4. Objem závaží je $\frac{m_z}{\rho_z}$, vztlak na ně působící $\frac{m_z}{\rho_z} \cdot \rho_v g$, tedy váha na vzduchu $m_z g (1 - \frac{\rho_v}{\rho_z})$. Je-li hmota předmětu m , je jeho váha na vzduchu podobně $m g (1 - \frac{\rho_v}{\rho_p})$. Z rovnosti obou vah $m = m_z (1 + \rho_v \frac{1/\rho_p - 1/\rho_z}{1 - \rho_v/\rho_p})$ a pro $\rho_v \ll \rho_p$ $m \approx m_z (1 + \rho_v (\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_z}))$.
5. V bodě přehrady v hloubce x , jehož vzdálenost od kraje přehrady je y , působí tlak $\rho g x$, kde ρ je hustota vody. Celková síla je kolmá k rovině přehrady a má velikost $F = \int_{x=0}^y \int_{y=0}^x \rho g x dy dx = \frac{1}{2} \rho g S y^2 = 706 \cdot 10^6 \text{ N} = 72000 \text{ Mp}$.
Celkový moment tlakových sil vzhledem k přímce $x = 0$ je $M = \int_{x=0}^y \int_{y=0}^x \rho g x \cdot y dy dx$.
 $\cdot x dy dx = \frac{1}{3} \rho g S y^3$, tedy působí síla ležící v hloubce $\frac{M}{F} = \frac{2}{3} y = 40 \text{ m}$ uprostřed přehrady (z důvodů symetrie).
6. Pro odhad předpokládáme, že voda v celém bubnu rotuje spolu s lopatkami úhlovou rychlostí $\omega = 293 \text{ s}^{-1}$. Užijeme výsledku řešeného příkladu 1 a dostaneme pro rozdíl tlaků $p_2 - p_1$ mezi místy B a A $p_2 - p_1 = \rho \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)$.
Výška, do níž kapalina hustoty ρ dostoupí, je $h = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \frac{\omega^2}{g} (r_2^2 - r_1^2)$;
pro vodu $h = 18,2 \text{ m}$.
7. Metacentrum je v tomto případě zřejmě (dle definice) ve středu koule. Položíme-li osu x do osy bóje a počátek do středu koule, je souřadnice těžiště (brana kladně směrem dolů)
$$x_T = \frac{m_2 x_2 - \mu(R + \ell/2)}{m_1 + m_2 + \mu \ell},$$

kde jsme vzali v úvahu, že kulové těleso bóje má těžiště ve středu koule, a délku tyče označili ℓ - její hmota bude pak $\mu \ell$ a souřadnice těžiště - $(R + \ell/2)$.
Podmínka stability

- dává $\ell(2R + \ell) < \frac{2m_2 x_2}{\mu}$, což vyřešeno dá $\ell < \sqrt{R^2 + \frac{2m_2 x_2}{\mu}} - R = 75 \text{ cm}$.
8. Z celkové výšky c hranolu je ponořena část $c \frac{\rho_D}{\rho_v}$, kde ρ_v je hustota vody. Těžiště ponořené části má tedy vzdálenost od základny $\frac{\rho_D}{\rho_v} \cdot \frac{c}{2}$, metacentrum je dle citovaného příkladu o vzdálenost $v^{-1} \cdot \int_S x^2 dS$ výše. Těžiště hranolu je ve vzdálenosti $c/2$ od základny, tedy pro stabilitu musí platit
$$\frac{\rho_D}{\rho_v} \cdot \frac{c}{2} + \frac{\int_S x^2 dS}{V} > \frac{c}{2}$$

Dosadíme-li $V = a^2 \cdot c \frac{\rho_D}{\rho_v}$, $\int_S x^2 dS = \frac{1}{3} a^2 \left(\frac{a}{2}\right)^2$ (v tomto případě moment setrvačnosti plochy S nezávisí na poloze osy), dostaneme podmínku
$$a > c \sqrt{6 \frac{\rho_D}{\rho_v} \left(1 - \frac{\rho_D}{\rho_v}\right)},$$

v našem případě $a > c \cdot 1,12$.
9. Mysleme si bublinu rozříznutou na poloviny. Na jednu z obou polovin působí jednak tlak po celém průřezu πR^2 , jednak tah povrchového napětí dvojitého povrchu bubliny podél celého obvodu $2\pi R \cdot F$. 2. Obě síly se ruší, mají tedy stejnou velikost a $p = \frac{4F}{R}$.
10. Nejmenší poloměr, který může mít kulová plocha, vedená kružnicí o poloměru r , je právě r . Největší přetlak v bublince u ústí kapiláry je tedy $\frac{2F}{r}$ (bublina má jediný povrch). Připočteme-li hydrostatický tlak $\rho g h$, vychází přetlak $\Delta p = \rho g h + \frac{2F}{r} = 341 \text{ N/m}^2 = 34,8 \text{ mm vodního sloupce}$.
11. Z barometrické rovnice $p_A = p_0 e^{-\frac{\rho_1 g}{p_1} \frac{T}{T_1} h_A}$ (a podobně pro místo B) plyne
($T_1 = 273^\circ \text{ K}$, $T = 289^\circ \text{ K}$)
a) $p_0 = p_A e^{\frac{\rho_1 g}{p_1} \cdot \frac{T}{T_1} h_A} = 762,4 \text{ torr}$
b) $h_B = h_A \cdot \frac{p_1 T_1}{\rho_1 g T} \ln \frac{p_A}{p_B} = 230 \text{ m} + 149 \text{ m} = 379 \text{ m}$.
12. Celkovou sílu F , která urychluje pohyb balónu a překonává odpor vzduchu při stoupání, získáme, odečteme-li od vztlakové síly $\rho_v V g$ váhu vodíku $\rho_H V g$ a váhu obalu s gondolou G ; přitom ρ_v, ρ_H jsou hustoty vzduchu a vodíku. Dosadíme-li za ρ_v, ρ_H hodnoty hustot ρ_{v0}, ρ_{H0} za podmínek při startu, udává velikost síly $F = F_0$ namáhání lana. Hustota vzduchu ρ_{v0} při teplotě 20° C a tlaku 760 torr se vypočte z hodnoty ρ_1 (při teplotě 0° C) uvedené v předešlé úloze:
 $\rho_{v0} = \rho_1 \cdot 273/293 = 1,205 \text{ kg m}^{-3}$. Tedy namáhání lana $F_0 = (\rho_{v0} - \rho_{H0}) V g - G = 3605 \text{ kp}$.
Vystoupí-li balón do výšky h , kde je menší tlak $p = p_0 e^{-\rho_1 g h / p_0}$, zmenší se v témže poměru jak hustota vzduchu ρ_v , tak hustota vodíku ρ_H . Tedy síla
$$F = g V (\rho_{v0} - \rho_{H0}) \cdot e^{-\rho_1 g h / p_0} - G.$$

Balón přestane stoupat, je-li síla $F = 0$, řešením této rovnice stanovíme výšku výstupu h_m

$$h_m = \frac{p_0}{\rho_{v0}g} \ln \frac{V(\rho_{v0} - \rho_{H0})}{g} = 8,83 \text{ km.}$$

13. Pokud jsou součásti vyrobeny z křemene o hustotě ρ_K , jsou vztlakové síly, které na ně působí, navzájem v témže poměru, jako jejich váhy. Proto se momenty vztlakových sil na obou stranách vahadla kompenzují a nenarušují vyvážení vahadla. Vztlak, odpovídající objemu dutiny v kouli, však není ničím kompenzován a má velikost $V\rho_v g$, kde ρ_v je hustota vzduchu. Je-li ρ_0 hustota vzduchu při tlaku p_0 , je $\rho_v = \rho_0 p/p_0$ hustota při tlaku p . Váhu předmětu dostaneme, odečteme-li vztlaky při obou vyváženích:

$$mg = Vg(p_2 - p_1) \cdot \rho_0/p_0, \text{ tedy hmota}$$

$$m = V(p_2 - p_1) \cdot \rho_0/p_0.$$

Dosažení ($\rho_0 = 1,205 \text{ kg m}^{-3}$ při $p_0 = 760 \text{ torr}$) dává

$$m = 0,09 \text{ mg.}$$

14. Vyjděte z rovnic (2) a (1) řešeného příkladu 3, kam pro oba případy dosadíte konkrétní tvar závislosti $r = r(h)$. Integrací dostanete v případě válce

$$T_v = \sqrt{\frac{R^4 - r^4}{r^4}} \frac{2H}{g} \pm \frac{R^2}{r^2} \sqrt{\frac{2H}{g}} \text{ a protože } H = R$$

$$T_v \pm \frac{R^{5/2}}{r^2} \sqrt{\frac{2}{g}}$$

a v případě koule

$$T_k \pm \frac{R^{5/2}}{r^2} \cdot \frac{14}{15\sqrt{2g}}.$$

Přibližná řešení odpovídají přibližnému vyjádření rychlosti v_2 v rovnici (1) řešeného příkladu 3.

$$15. \quad Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{S_1^2 - S_2^2}}$$

16. Není-li proudění vložem trubice podstatně ovlivněno, můžeme pokládat tlakové poměry v místech označených 1 na obr. 9,7 za stejné. Potom aplikací Bernoulliovy rovnice na proudění podél na obrázku naznačené proudnice dostaneme

$$v = \sqrt{2(p_2 - p_1)/\rho},$$

kde ρ je hustota vzduchu. Při odvození jsme pokládali vzduch za nestlačitelný, což v daném případě je přijatelné zjednodušení.

$$17. \quad Q = \sqrt{\frac{2T S_1 S_2}{\rho(S_1 + S_2)}}. \text{ Návod: Uvažujte změnu hybnosti proudící kapaliny.}$$

$$18. M = 8 S g h \rho \ell.$$

19. Bude-li potrubí uzavřeno, tj. lze-li položit rychlost vody v potrubí $v = 0$, lze získat tlak v potrubí p' podobně jako u Pitotovy trubice. Z Bernoulliovy rovnice, kterou napíšeme pro odpovídající proudovou trubici, plyne

$$p' = p + \frac{1}{2} \rho v^2,$$

kde p je tlak v pohybující se kapalině v blízkosti ústí trubice, $v = \omega r_2$ rychlost kapaliny a ρ její hustota. Tlak p se shoduje s tlakem p_2 , se kterým jsme počítali v úloze 6. Je tedy vidět, že výtlačná výška h' bude nyní větší než výška h ve zmíněné úloze:

$$h' = \frac{p' - p_1}{\rho g} = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{\omega^2 r_2^2}{2g} = 29,4 \text{ m}$$

20. Rozdíl váhy kuličky a vztlakové síly na ni působící se při rovnoměrném pohybu musí rovnat odporu prostředí:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_0 - \rho) \cdot g = 6\pi \eta r v$$

Z toho rychlost:

$$v = \frac{2(\rho_0 - \rho)g}{9\eta} r^2 = 0,0230 \text{ m/s.}$$

Pro Reynoldsovo číslo dostáváme $R = \frac{2rv\rho}{\eta} = 0,062$, nedopustili jsme se tedy užitím Stokesova vzorce větší chyby než 2 %.

21. Ve vzdálenosti r_1 od středu má rotující disk tečnou složku rychlosti ωr_1 , gradient rychlosti v mezeře je tedy $\omega r_1/d$ a napětí $\eta \omega r_1/d$. Síla, působící na plošný element dS pevného disku, je $dS \cdot \eta \omega r_1/d$, její moment vzhledem k ose o je pak $dS \cdot \eta \omega r_1^2/d$. Celkový moment se získá integrací přes plochu kruhu S :

$$D = \int_S \frac{\eta \omega r_1^2}{d} dS = \frac{\eta \omega}{d} \int_{r_1=0}^R r_1^2 \cdot 2\pi r_1 dr_1 = \frac{\pi \eta \omega r^3}{2d} = 0,456 \cdot 10^{-7} \text{ N.m.}$$

22. Otáčí-li se deska kolem bodu A úhlovou rychlostí $\omega = \dot{\varphi}$ (φ je úhel otocení), lze stejně jako v předchozí úloze stanovit moment sil viskozity:

$$D = 2 \int_S \frac{\eta \omega r^2}{d} dS = \frac{2\eta \omega}{d} \int_S r^2 dS;$$

zde r značí vzdálenost od bodu otáčení A, integrace se provádí přes celou jednu stranu desky (druhou stranu započítáváme dvojkou před integrálem). Poslední integrál je však moment setrvačnosti plochy S (kterou bereme, jakoby měla plošnou hustotu hmoty jednotkovou) vzhledem k bodu A. Hodnota integrálu je tedy $\frac{3}{2} R^2 \cdot \pi R^2$.

Brzdný moment D je pak třeba dosadit do pohybové rovnice fyzického kyvadla

$$J\ddot{\varphi} + \frac{3\pi R^4 \eta}{d} \dot{\varphi} + MgR\varphi = 0,$$

kde J je moment setrvačnosti disku vzhledem k ose procházející bodem A; $J = \frac{3}{2} MR^2$. Tato rovnice má jako řešení tlumené harmonické kmity s dekrementem útlumu

$$\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{2g}{3R^5} \left(\frac{Md}{\pi\eta}\right)^2 - 1}}$$

23. Poiseuilleův vztah dává, je-li g gravitační zrychlení a $\rho = 0,998 \text{ g/cm}^3$ hustota kapaliny

$$\eta = \frac{\pi r^4 t}{8 \ell V} \rho g h - m \frac{\rho V}{8 \pi \ell t},$$

kde druhý člen je Hagenbachova korekce na úbytek tlaku na začátku kapiláry, m empirický součinitel s hodnotou pohybující se okolo 1,1.

První sčítanec dává hodnotu bez korekce $\eta = 9,63 \cdot 10^{-3}$ poise. Korekce činí asi 1,7 %, korigovaná hodnota $\eta = 9,46 \cdot 10^{-3}$ poise. Tabulková hodnota je $9,67 \cdot 10^{-3}$ poise. Reynoldovo číslo se pro proudění trubicí zavádí jako

$$R = \rho \bar{v} \cdot (2r)/\eta,$$

kde $\bar{v}$ je střední rychlost proudění trubicí: $\bar{v} = V/(\pi r^2 t)$. V našem případě R vyjde asi 130, laminárnost proudění je tedy zaručena.

24. Poklesne-li výška hladiny za čas dt o $(-dh)$, je vytekly objem kapaliny za tuto dobu $-S(h) \cdot dh$. Dle Poiseuilleova vztahu je tento objem, proteklý kapilárou při tlakovém rozdílu $\Delta p = \rho g h$ (ρ - hustota kapaliny) dán výrazem

$$\frac{\pi r^4}{8 \eta \ell} \Delta p \cdot dt = \frac{\pi r^4}{8 \eta \ell} \rho g h dt$$

Porovnáním dostáváme vztah pro rychlost klesání hladiny

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{h}{S(h)} \frac{\pi r^4 g}{8 \eta \ell}$$

kde $\nu = \mu/\rho$ je kinematický koeficient viskozity. Má-li rychlost být konstantní, musí být $S(h)$ úměrné h . Rotálně symetrické nádoby, kde má hladina stále kruhový tvar, lze charakterizovat závislostí poloměru R kruhu na výšce hladiny h . Pak plocha $S = \pi R^2$ a konstantní rychlost klesání hladiny vyžaduje splnění vztahu $R = k\sqrt{h}$ (k konstanta).

Integrací rovnice pro rychlost v mezích h_1 až h_2

$$\tau = \frac{8 \nu \ell}{\pi r^4 g} \int_{h_1}^{h_2} \frac{S(h)}{h} dh$$

Doba τ je tedy přímo úměrná koeficientu ν , součinitel $u \nu$ je (při daném gravitačním zrychlení g) určen geometrickými rozměry zařízení.

10. Vlnění a akustika

- $v = \sqrt{\mathcal{E} \rho} \approx 330 \text{ m/s}$. Poissonova konstanta $\mathcal{E} = 1,4$.
- $v = \sqrt{2 \mathcal{E} E / 2M} \approx 336 \text{ m/s}$. $M = 14 \text{ kg}$ je kilomol dusíku. Poissonova konstanta $\mathcal{E} = 1,4$.
- Rychlost zvuku ve vzduchu $v \approx v_0 (1 + \beta t / 2)$, kde $v_0 \approx 331 \text{ m/s}$ je rychlost zvuku při teplotě $t = 0$ a $\beta \approx (1/273) \text{ grad}^{-1}$ je teplotní koeficient rozpínatelnosti plynu. Teplota vzduchu ve výšce x nad zemí $t = (20 - 7 \cdot 10^{-3} x)^\circ \text{C}$.
Pak

$$\tau = \int_0^h \frac{dx}{v} \approx 30,2 \text{ s}.$$

- Za předpokladu adiabatické změny je $\left(\frac{dp}{p}\right)_{\text{ad}} = \mathcal{E} \frac{d\rho}{\rho}$ (ρ je hustota plynu). Označíme-li okamžitou výchylku částice plynu u , pak

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$u = u_0 \sin \omega(t - x/c); \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -(u_0 \omega/c) \cos \omega(t - x/c) = -\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{v}{c}.$$

Z toho pak $\frac{dp}{p} = \mathcal{E} \frac{v}{c}.$

- $\sin \alpha_0 / \sin (\pi/2) = v_1/v_2; \alpha_0 = 13^\circ 33'.$
- Z Huygensova principu lze odvodit, že $v_1 = v_2 \sin (\varphi/2).$
- Z Rayleighova výrazu pro grupovou rychlost $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$ dostaneme v jednotlivých případech tyto výsledky:
 - $u = v = a$
 - $u = 3v/2$
 - $u = 2v$
 - $u = v(1 + b\lambda^2) / (1 - b\lambda^2)$

- Podélné vlny se šíří v pevných látkách rychlostí $v_1 = \sqrt{E/\rho}$ a příčné vlny rychlostí $v_2 = \sqrt{G/\rho} = \sqrt{mE/2(m+1)\rho} = \sqrt{mv_1^2/2(m+1)\rho} = 2740 \text{ m/s}$. E je Youngův modul pružnosti v tahu, G je modul torze a $\rho \approx 8,9 \text{ g/cm}^3$ je hustota mědi.

- $\nu = 1256/2\pi \approx 200 \text{ Hz}$
 $c = 1256/3,7 \approx 338 \text{ m/s}$
 $\lambda = 2\pi/3,7 \approx 1,69 \text{ m}$
 $v_0 = 1256 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$
 $p_0 = \rho \omega c u_0 \approx 54,7 \text{ N/m}^2$

10. $w = \rho \omega^2 A^2 / 2$, kde ρ je hustota prostředí, ω kruhová frekvence a A amplituda kmitajících částic.

$$P_0 = \rho \omega v A$$

Z těchto dvou vztahů plyne pro hustotu energie $w = P_0^2 / 2 \rho v^2$

$$I = w v = P_0^2 / 2 \rho v$$

Ve vzduchu $w_1 = 3,54 \cdot 10^{-14} \text{ J/m}^3$, $I_1 = 11,7 \cdot 10^{-2} \text{ J/m}^2$,
ve vodě $w_2 = 2,27 \cdot 10^{-12} \text{ J/m}^3$, $I_2 = 33,7 \cdot 10^{-10} \text{ J/m}^2$.

11. Jestliže rovinné vlny postupují ve směru osy x , pak pro body, ve kterých jsou kmity vzbuzené oběma vlnami ve fázi, musí platit

$$(\omega_1 t - x_n k_1) - (\omega_2 t - x_n k_2) = n \cdot 2\pi$$

kde $n = 0, 1, 2, \dots$; ω_1, ω_2 jsou kruhové frekvence a $k_1 = 2\pi/\lambda_1, k_2 = 2\pi/\lambda_2$ jsou vlnová čísla příslušná jednotlivým vlnám.

Vzdálenost $d = x_{n+1} - x_n = \lambda_2 \lambda_1 / (\lambda_1 - \lambda_2)$.

Souřadnice x bodů, ve kterých souhlasí fáze v čase t , určíme z podmínky

$$(\omega_1 t - x k_1) - (\omega_2 t - x k_2) = 0$$

Souřadnice x bodů, ve kterých souhlasí fáze v čase t' , určíme z podmínky

$$(\omega_1 t' - x' k_1) - (\omega_2 t' - x' k_2) = 0$$

$$\text{Rychlost } u = \frac{x' - x}{t' - t} = (v_1 \lambda_2 - v_2 \lambda_1) / (\lambda_2 - \lambda_1).$$

12. Při interferenci nastává minimum pro dráhový rozdíl $\Delta l = k\lambda$. Posunutím trubice T_1 o d změním dráhový rozdíl o $2d$. Jestliže d je vzdálenost mezi sousedními zeslabeními, pak $2d = \lambda \Rightarrow \lambda = 3 \text{ cm}$.

$\nu = v/\lambda \approx 1,15 \cdot 10^4 \text{ Hz}$. Rychlost zvuku ve vzduchu při teplotě $t = 25^\circ \text{C}$,
 $v \approx 347 \text{ m/s}$.

13. $\nu_1/\nu_2 = v_1/v_2 = \sqrt{\rho_2/\rho_1} \approx 0,24$

v je rychlost zvuku, ρ je hustota plynu, index 1 přísluší vzduchu, index 2 vodíku.

14. a) $\nu_a = kc/2l \approx k \cdot 344/1,5 = k \cdot 229,4 \text{ Hz}$.

$$\text{b) } \nu_b = (2k - 1) c/4l \approx (2k - 1) \cdot 114,6 \text{ Hz},$$

kde $k = 1, 2, 3, \dots$ a c je rychlost zvuku ve vzduchu při teplotě $t = 20^\circ \text{C}$.

15. $\nu_1 - \nu = 8 \text{ Hz}$, $\nu/\nu_1 = \sqrt{15/16}$; $\nu = 252 \text{ Hz}$.

16. Ověříme, provedeme-li příslušné derivace našeho výrazu a dosadíme-li je do vlnové rovnice.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -i A k e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = i^2 A k^2 e^{i(\omega t - kx)} = -A k^2 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = i A \omega e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A \omega^2 e^{i(\omega t - kx)}$$

Po dosazení dostaneme

$$\omega = v \cdot k$$

Jestliže $\omega = v k$, pak daný výraz vyhovuje vlnové rovnici.

Vlnové číslo $k = 2\pi/\lambda$, kde λ je vlnová délka.

17. Netopýr slyší tón o kmitočtu $\nu = 4,5 \cdot 10^4 \text{ Hz}$ a zvuk odražený od stěny kmitočtu $\nu' = c\nu/(c - v) = 4,58 \cdot 10^4 \text{ Hz}$. Kmitočet vzniklých rážů $\nu_r = \nu' - \nu = 809 \text{ Hz}$.

18. V bodě A je vnímán zvuk ladičky jako tón kmitočtu $\nu_1 = \nu c/(c+v)$. Stěna ve funkci "pozorovatele" přijímá tón o kmitočtu $\nu_2 = \nu c/(c-v)$, který odráží. Tóny o kmitočtech ν_1 a ν_2 dávají rázy o kmitočtu $\nu_r = \nu_2 - \nu_1 = 3 \text{ Hz}$

$$\nu \approx \nu_r \cdot c/2v = 2040 \text{ Hz}.$$

19. Tlaková amplituda $P = \rho \omega v \cdot U$,

$$\text{amplituda elongace } U = \frac{P}{\rho \omega v} = \frac{P}{2\pi \nu \rho v},$$

kde ρ je hustota prostředí, ω kruhová frekvence, v rychlost zvuku.

Ve vzduchu je $U_s \approx 0,75 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ a $\nu_s \approx 0,75 \omega = 5,2 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$

$$U_b \approx 0,75 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Ve vodě je $U_b \approx 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}$

20. $\Lambda = 10 \log (I/I_0) = 70 \text{ fónů}$

$$\Lambda_1 = 10 \log (I_1/I_0) = 40 \text{ fónů}.$$

Pak $\frac{I}{I_1} = 1000$. I_0 je prahová intenzita srovnávacího tónu 1000 Hz .

21. $\Lambda_1 = 10 \log (I_1/I_0) = 90 \text{ fónů}$

$$\Lambda = 10 \log (10 I_1/I_0) = 100 \text{ fónů}$$

I_1 je intenzita zvuku v pozorovaném místě od jednoho motocyklu,

I_0 je prahová intenzita srovnávacího tónu 1000 Hz .

22. Ladičku vzhledem k uvedeným vzdálenostem považujeme za bodový akustický zdroj. Amplituda tlumené kulové vlny s koeficientem útlumu δ je $U_0 = (A/\ell) e^{-\delta \ell}$

kde ℓ je vzdálenost od zdroje, A je počáteční amplituda v čase $t = 0$.

Ve vzdálenosti ℓ_1 klesne U_0 pod práh slyšení o 30 s dříve než v místě vzdáleném ℓ_2 od zdroje. Musí platit

$$(A/\ell_1) e^{-\delta \ell_1} = (A/\ell_2) e^{-\delta \ell_2}$$

$$\ell_2/\ell_1 = e^{-\delta \Delta \ell}; \quad \delta = 0,077 \text{ s}^{-1}$$

23. U bodového zdroje klesá intenzita se čtvercem vzdálenosti. Bez absorpce prostředí by $I_1/I_2 = l_2^2 / l_1^2$.

Při absorpci s koeficientem útlumu k platí

$$I_2 = l_1^2 I_1 e^{-k(l_2 - l_1)} / l_2^2 \approx 8,06 \cdot 10^{-4} \text{ erg/cm}^2\text{s}.$$

Literatura

- Bezuchov N.I.: Sbornik zadač po teorii uprugosti i plastičnosti, GITTL, Moskva 1957.
- Brdička M.: Mechanika kontinua, NČSAV, Praha 1959.
- Cedrik M.S.: Posobiye po fizike dlja postupajuščich ve VUZy, Vyssšaja skola, Minsk 1965.
- Crawford F.S.: Waves - Berkley Physics Course - Volume 3, McGraw-Hill, New York 1968.
- Dibelka J.: Sběrka řešených příkladů a úloh z fyziky, I. díl, skriptum, Fakulta technické a jaderné fyziky ČVUT, Praha 1968.
- The Feynman Lectures on Physics, Exercises, ruský překlad, Mir, Moskva 1969.
- Gončarenko S.U.: Konkursnyje zadači po fizike, Technika, Kijev 1966.
- Hajko V.: Fyzika v příkladech, 2. vyd., SNTL, Praha 1963.
- Horák Z., Krupka F., Šindelář V.: Technická fyzika, SNTL, Praha 1961.
- Kittel Ch., Knight W.D., Ruderman M.A.: Mechanics - Berkley Physics Course - Volume 1, McGraw-Hill, New York 1965.
- Landau L.D., Lifšic E.M.: Mechanika - Elektrodynamika, Nauka, Moskva 1969.
- Meščerskij I.V.: Sbornik zadač po teoretičeskoj mechanice, 19. vyd., GITTL, Moskva 1953.
- Orear J.: Fundamental Physics, ruský překlad, Mir, Moskva 1966.
- Sacharov D.I., Kosminkov I.S.: Sběrka úloh z fyziky, český překlad, NČSAV, Praha 1953.
- Salva V.I.: Dynamika v příkladech, SVTL, Bratislava 1956.
- Sears F.W., Zemansky M.W.: Mechanics, Heat and Sound - University Physics, 3. vyd. Addison-Wesley, Reading 1963.
- Strelkov S.P., Elcin I.A., Jakovlev I.A.: Sběrka příkladů z fyziky - I. část, NČSAV, Praha 1953.
- Schmitt N.: Aufgaben aus der technischen Mechanik, B.G.Teubner, Leipzig 1916.
- Vindušková O., Kubálková S.: Příklady z fyziky, skriptum, Matematicko-fyzikální fakulta KU, Praha 1969.
- Volkenštejn D.S.: Sbornik zadač po obščemu kursu fiziky, Nauka, Moskva 1965.
- Záviška F.: Mechanika, JČMT, Praha 1933.



382-159-91 17/32

Tato publikace neprošla jazykovou ani redakční úpravou